ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 19 MAI 1941.

PRÉSIDENCE DE M. ERNEST ESCLANGON.



MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Émile Picard** dépose sur le bureau de l'Académie deux Ouvrages publiés par le Bureau des Longitudes :

1° *Connaissance des Temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an* 1942;

2° *Éphémérides nautiques* ou *Extrait de la Connaissance des Temps pour l'an* 1941, *spécialement à l'usage des marins.*

BIOLOGIE MATHÉMATIQUE. — *Sur certains problèmes d'hérédité connexes au problème de la ruine des joueurs.* Note de M. **Émile Borel.**

La ruine des joueurs a donné lieu, dès le XVIIIe siècle, à de nombreux travaux; des artifices ingénieux, tels que le problème du scrutin de Désiré André, ont été utilisés pour éviter les dénombrements directs. L'élégance même de ces solutions indirectes a conduit à négliger ces dénombrements. Ceux-ci sont cependant fort simples, et il me paraît invraisemblable qu'ils n'aient pas été faits par quelques-uns des nombreux mathématiciens qui, depuis plus de deux siècles, se sont intéressés à ces questions; ne les ayant cependant vus reproduits nulle part, je vais les indiquer brièvement, malgré leur caractère élémentaire.

Le triangle arithmétique de Pascal donne le nombre C_n^b des combinaisons que peuvent présenter n parties successives dont a sont gagnées et b perdues $(a+b=n)$; il y a fort peu de chose à y modifier pour ne conserver que les combinaisons où la fortune initiale du joueur, supposée égale à c

$(c \leqq b)$, n'a jamais été réduite à zéro. Il suffit, en adoptant la disposition ci-après, de supprimer tous les nombres qui se trouveraient à gauche d'un trait vertical correspondant à la valeur de c; notre tableau est calculé dans l'hypothèse $c = 3$.

			1								
		1		1							
	1		2		1						
.		3		3		1					
.	3		6		4		1				
. .		9		10		5		1			
. .	9		19		15		6		1		
. . .		28		34		21		7		1	
. . .	28		62		55		28		8		1

Les nombres de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, à partir de la droite, ont pour valeurs C_n^0, C_n^1, C_n^2, $C_n^3 - C_n^0$, $C_n^4 - C_n^1$, etc. Si c a une valeur quelconque, le terme général de notre tableau est égal à $C_n^k - C_n^{k-c}$, si l'on convient : 1° que C_n^{k-c} est remplacé par zéro lorsque $k-c$ est négatif; 2° que l'on conserve seulement les termes tels que $C_n^k - C_n^{k-c}$ soit positif.

On tire aisément de ce tableau la solution du problème du scrutin généralisé, et l'on peut en tirer également la solution de problèmes sur la ruine des joueurs que Moivre a résolus par un ingénieux artifice (voir Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités*).

Il va de soi que, si les probabilités de gain et de perte sont respectivement p et q, la probabilité pour que, au bout de n parties, le joueur dont la fortune initiale est c n'ait pas été ruiné et ait réalisé un gain $a-b$, sera $(C_n^b - C_n^{b-c})p^a q^b$.

Dans les calculs sur ces probabilités, s'introduisent les polynomes

$$P_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} y + C_{2n+1}^2 x^{2n-1} y^2 + \ldots + C_{2n+1}^n x^{n+1} y^n \qquad (x+y=1),$$

et les polynomes analogues P_{2n}, dont le dernier terme $C_{2n}^n x^n y^n$ sera divisé par 2. Bornons-nous aux polynomes $P_{2n+1}(x)$; en tenant compte de $x+y=1$, on obtient aisément

$$P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} C_{2n}^n (x-y) x^n y^n,$$

d'où l'on conclut

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-y)[1 + C_2^1 xy + C_4^2 x^2 y^2 + \ldots + C_{2n}^n x^n y^n].$$

On se trouve ainsi conduit à étudier la série

$$\varphi(xy) = 1 + C_2^1 xy + C_4^2 x^2 y^2 + \ldots + C_{2n}^n x^n y^n + \ldots$$

dont la somme est, puisque $x + y = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}} = \frac{1}{|x - y|}.$$

C'est une série tout à fait analogue à celle qui donne le développement en série de $|x|$ au moyen de $\sqrt{1-(1-x^2)}$, série citée dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Joseph Bertrand et dont M. Lebesgue, qui l'a retrouvée, a mis en évidence l'intérêt. Notre série se présente naturellement lorsque l'on cherche la limite du polynome $P_{2n+1}(x)$ pour n infini. Cette limite est 1 pour $x > y$, $1/2$ pour $x = y = 1/2$, et zéro pour $x < y$.

Les résultats précédents, et tous ceux qui ont été obtenus sur le problème de la ruine des joueurs, s'appliquent aisément aux problèmes sur l'hérédité énoncés à la fin d'une précédente Note ([1]). Nous utilisons ici les définitions de cette Note. On peut considérer que chaque être qui naît (ainsi que chaque chromosome de cet être) se trouve engagé dans un jeu où il risque sa fortune égale à l'unité. S'il meurt sans postérité, il est ruiné; s'il a k descendants à la génération suivante (s'il s'agit d'un chromosome, on ne tiendra compte que de ceux des descendants qui possèdent ce chromosome; leur nombre moyen sera $k/2$), sa fortune est devenue k, c'est-à-dire que son bénéfice est $k-1$. Il continue alors le jeu en jouant k parties successives [ou simultanées, cela revient au même ([2])] analogues à la partie initiale; du résultat global de ces k parties dépend la valeur de sa fortune (c'est-à-dire le nombre de ses héritiers), à la génération suivante, et ainsi de suite.

Il faut toutefois observer, lorsqu'il s'agit de descendants généalogiques, que certains risquent de figurer plusieurs fois, s'il y a des croisements parmi les descendants; s'il s'agit des chromosomes, un même chromosome peut figurer au plus deux fois dans une paire.

Dans le cas général où la probabilité pour que le nombre des descen-

---

([1]) *Comptes rendus*, **212**, 1941, p. 777.

([2]) Il faut cependant regarder les parties comme consécutives et tenir compte de leur nombre pour calculer la correspondance entre le nombre n des parties envisagé ci-dessus et le nombre des générations.

dants soit k est désignée par p_k, nous avons

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_k = 1,$$
$$p_1 + 2p_2 + \ldots + kp_k = \lambda.$$

Dans le cas où la population reste constante, $\lambda = 1$ s'il s'agit des descendants biologiques d'un chromosome et $\lambda = 2$ s'il s'agit des descendants généalogiques. La probabilité pour que la descendance s'éteigne est égale à la plus petite racine positive de l'équation

$$x = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_k x^k.$$

Cette équation a toujours deux racines réelles positives, dont l'une est égale à 1, l'autre étant supérieure, égale ou inférieure à 1 suivant que λ est inférieur, égal ou supérieur à l'unité. C'est donc seulement lorsque λ est supérieur à 1 que la probabilité x est inférieure à 1.

Dans le cas où l'on considère les descendants généalogiques d'un individu H, nous trouvons que la probabilité pour que sa descendance ne s'éteigne pas, égale à $1 - x$, a une valeur finie dès que λ est supérieur à 1; cependant, si λ est inférieur à 2, la population totale décroît rapidement et tend vers zéro. L'explication de ce paradoxe apparent est que la décroissance de la population entraîne nécessairement, au bout de peu de générations, des croisements entre cousins et par suite de nombreux descendants comptés plusieurs fois; le nombre des descendants généalogiques réels est donc très inférieur au nombre qui résulte de la théorie du jeu. Pour que l'application de la théorie du jeu fût correcte, il faudrait admettre que les descendants de l'individu considéré trouvent toujours à s'allier avec des membres d'une population plus prolifique, en évitant soigneusement les alliances entre cousins, même fort éloignés. Admettons, en outre, que les descendants résultant de ces croisements conservent la fécondité de l'ancêtre peu prolifique dont nous sommes partis, fécondité définie par les coefficients p_i qui conduisent à une valeur de λ comprise entre 1 et 2. Dans ces conditions, il y aura une probabilité non nulle pour que le nombre total des descendants généalogiques de cet ancêtre aille en croissant avec le temps. Mais, si l'on porte l'attention sur l'un des chromosomes de cet ancêtre, λ devant alors être remplacé par $\lambda/2$, qui est inférieur à un, le nombre des descendants de ce chromosome tendra rapidement vers zéro et, par suite, le nombre des descendants biologiques de l'individu considéré tendra également vers zéro, bien que le nombre de ses descendants généalogiques augmente à chaque génération.

Les hypothèses précédentes correspondent assez exactement, pour certains pays et certaines périodes, à l'étude de la descendance d'une population urbaine peu prolifique qui se renouvelle et s'accroît par ses croisements avec une population rurale plus prolifique.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces admettant une seconde forme fondamentale donnée.* Note de M. ÉLIE CARTAN.

1. Si les travaux relatifs aux surfaces de ds^2 donné (problème de la déformation de Gauss) sont très nombreux, il ne semble pas, du moins à ma connaissance, qu'on ait étudié le problème analogue relatif à la seconde forme fondamentale

$$\Phi = \mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2, \tag{1}$$

qui, comme on sait, pour un arc de courbe infiniment petit tracé sur la surface, est égale au produit de la courbure normale par le carré de la longueur de l'arc. Le cas où la forme Φ est le carré d'une forme linéaire en du, dv est sans intérêt. Le cas général où le discriminant $\mathrm{D}'^2 - \mathrm{DD}''$ est différent de zéro, que la forme soit définie, positive ou négative, ou indéfinie, présente au contraire un intérêt assez considérable. Je vais indiquer quelques résultats relatifs à ce problème en supposant les fonctions D, D′, D″ analytiques; nous nous limiterons au domaine réel.

2. Les surfaces analytiques réelles admettant la seconde forme fondamentale (1) dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument. Il existe un théorème analogue au théorème célèbre de Gauss d'après lequel la courbure totale d'une surface admettant une première forme fondamentale donnée ne dépend que de cette forme et est égale à sa courbure riemannienne. Si nous regardons la forme Φ comme le ds^2 d'une variété riemannienne à deux dimensions et si nous désignons par Q sa courbure riemannienne au point (u, v), toutes les surfaces admettant Φ pour seconde forme fondamentale ont en commun, au point (u, v), une certaine fonction de leurs courbures principales et de leurs dérivées suivant les directions principales, et cette fonction a la valeur Q. On peut définir cette fonction en considérant un rectangle infinitésimal formé de lignes de courbure; en appelant $d\sigma$ l'aire de ce rectangle, L et K la courbure moyenne et la courbure totale de la surface, on a l'égalité

$$\mathrm{Q} = \lim \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{K}\,d\sigma}} \int \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{K}}} \frac{ds}{\mathrm{R}_g}, \tag{2}$$

l'intégrale étant étendue au périmètre du rectangle, $1/R_g$ désignant la courbure géodésique. Sous forme finie, rapportons la surface à un système de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le point considéré M, l'axe des z étant normal à la surface; soit

$$(3)\qquad z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \frac{1}{6}(\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3) + \ldots$$

le développement de z suivant les puissances de x et de y. La relation (2) s'écrit alors

$$(4)\qquad Q = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{4}\frac{a(\gamma^2 - \beta\delta) + b(\alpha\delta - \beta\gamma) + c(\beta^2 - \alpha\gamma)}{(ac - b^2)^2};$$

le premier terme est la demi-courbure moyenne de la surface; le second terme est un invariant simultané par rapport à toute substitution linéaire effectuée sur x et y de la forme quadratique et de la forme cubique qui figurent au second membre de (3). Si les axes Mx et My sont les tangentes principales, le coefficient b est nul, a et c sont les courbures principales, α et β les deux dérivées de la première courbure principale, β et δ celles de la seconde, suivant les deux directions principales. Le second membre de (4) est nul pour toute surface minima; il est classique en effet que la seconde forme fondamentale d'une surface minima est réductible à la forme $du^2 - dv^2$, mais il y a une infinité d'autres surfaces jouissant de la même propriété. La quantité Q a la dimension de l'inverse d'une longueur

3. Le *problème de Cauchy* se pose de la manière suivante. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la forme Φ est définie positive; nous appellerons V la variété riemannienne à deux dimensions dont le ds^2 est la forme Φ. Donnons-nous sur V une courbe analytique γ et appelons t l'abscisse curviligne d'un point de γ comptée à partir d'une origine fixe et dans un sens positif donné sur γ [*cette abscisse est calculée suivant la métrique* (1) *de* V]. Le problème de Cauchy sera bien déterminé et admettra une solution analytique unique si l'on peut faire correspondre aux différents points de γ des trièdres satisfaisant à certaines conditions qu'il serait trop long de préciser. Nous pourrons par exemple faire correspondre à chaque point m de γ un trièdre dont l'origine sera le point M de la surface S qui correspondra au point m de γ, et qui sera formé de trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ dont le premier $\vec{e}_1$ sera le vecteur tangent à S qui correspond au vecteur unitaire tangent à γ dans la variété V; le second $\vec{e}_2$ sera le

vecteur tangent à S qui correspond au vecteur unitaire normal à γ en m dans la variété V ($\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ seront portés par deux tangentes conjuguées de S); enfin le vecteur $\vec{e}_3$ sera le vecteur unitaire normal à S. Choisissons arbitrairement la ligne analytique C, lieu des origines des trièdres, qui correspondra à V, ainsi que la correspondance ponctuelle analytique entre C et γ. Désignons enfin par $1/R$ la courbure de C, $1/T$ sa torsion, ϖ l'angle de la normale à la surface avec la normale principale à C. Appelons s l'abscisse curviligne d'un point de C; on aura, d'après la signification même de Φ, la relation

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\cos\varpi}{R} = 1;$$

on a donc une condition de possibilité, à laquelle doit satisfaire la correspondance ponctuelle entre C et γ,

$$(5) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \geq R.$$

Cette condition étant supposée remplie, on aura ϖ au signe près. Désignons, pour abréger, par A et B la courbure normale et la torsion géodésique de C,

$$A = \frac{\cos\varpi}{R}, \qquad B = \frac{d\varpi}{ds} + \frac{1}{T}.$$

On a alors [1]

$$(6) \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}\vec{T}, \qquad \vec{e}_2 = \lambda\left(A\vec{\Theta} - B\vec{T}\right), \qquad \vec{e}_3 = \cos\varpi\vec{N} + \sin\varpi\vec{B}.$$

Le coefficient λ est donné par l'équation du second degré

$$(7) \qquad \left[A\frac{dB}{ds} - B\frac{dA}{ds} + A(A^2 + B^2)\operatorname{tang}\varpi\right]\lambda^2 - 2hA\lambda + \operatorname{tang}\varpi = 0,$$

où h désigne la courbure géodésique de γ dans la variété riemannienne V.

Une nouvelle condition de possibilité est donc que le discriminant de cette équation soit positif,

$$(8) \qquad h^2A^2 - \operatorname{tang}\varpi\left[A\frac{dB}{ds} - B\frac{dA}{ds} + (A^2 + B^2)A\operatorname{tang}\varpi\right] > 0.$$

---

(1) $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ sont les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet de la courbe C; $\vec{\Theta}$ désigne le vecteur unitaire $\sin\varpi\vec{N} - \cos\varpi\vec{B}$ normal à $\vec{T}$ et tangent à la surface.

L'angle ϖ ayant deux valeurs possibles, égales et opposées, on voit que si l'inégalité (3) est vérifiée, le problème comporte zéro solution, deux solutions ou quatre solutions ([2]).

Si le déterminant de l'équation (7) en λ est nul, les données sont *caractéristiques*. Le problème est alors en général impossible. Pour qu'il soit possible, il est nécessaire d'ajouter une nouvelle condition aux données; elle s'exprime par une certaine relation faisant intervenir A, B, ϖ et leurs dérivées du premier ordre par rapport à s. Les lignes caractéristiques d'une surface S admettant la seconde forme fondamentale donnée admettent pour tangentes en un point M celles dont les paramètres directeurs x, y s'obtiennent en annulant, dans l'équation (2) de la surface rapportée au trièdre trirectangle d'origine M dont il a été question plus haut, le jacobien des deux formes quadratique et cubique ([3]) qui figurent dans le second membre de (2) :

$$(9)\quad (a\beta - b\alpha)x^3 + (2a\gamma - b\beta - c\alpha)x^2y + (a\delta + b\gamma - 2c\beta)xy^2 + (b\delta - c\gamma)y^3 = 0.$$

Il y a donc sur la surface S trois familles de caractéristiques, dont une au moins est réelle.

4. Si la forme Φ est indéfinie et si l'on considère, dans la variété riemannienne V, une ligne de longueur nulle γ, on peut se donner arbitrairement une courbe *gauche* C lui correspondant, ainsi qu'une correspondance ponctuelle arbitraire entre C et γ : il existe alors toujours deux surfaces analytiques S contenant C et admettant C comme ligne asymptotique. En tout point de C ces deux surfaces sont tangentes et admettent les mêmes tangentes asymptotiques. Si l'on se donnait pour C une droite, cette droite serait une ligne caractéristique et certaines conditions nécessaires seraient à réaliser.

([2]) Ces résultats légitiment, en la précisant, l'affirmation énoncée au début du n° 2 que les surfaces admettant la seconde forme fondamentale Φ dépendent de trois fonctions arbitraires, la courbe C dépendant de deux fonctions arbitraires et la correspondance entre C et γ introduisant une troisième fonction arbitraire.

([3]) La forme cubique, égalée à zéro, donne les trois tangentes au point M à l'intersection de la surface S avec le paraboloïde ayant pour axe la normale à la surface en M et admettant en ce point un contact du second ordre avec la surface.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une décomposition en produit infini des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien.* Note de M. **Gaston Julia**.

1. Un opérateur linéaire borné A de l'espace hilbertien H est défini par les vecteurs $A_n = Ae_n$ correspondant aux vecteurs (e_n) formant le système orthonormal qui sert de base à H. Ces vecteurs doivent être tels que $\sum_n |(A_n, X)|^2$ converge pour tout vecteur X de H. On a donné antérieurement ([1]) une règle intrinsèque pour reconnaître ce fait. Il faut former le système orthonormal (ε_n) déduit des A_n par la règle de E. Schmidt; on a alors $A_n = \alpha_{n1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{nn}\varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ et la matrice récurrente $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|$ doit être bornée. Dans ces conditions, on a, pour tout vecteur $X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, $Y = AX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_n$, cette dernière série convergeant fortement pour tout X de H.

L'opérateur auxiliaire $\mathcal{A}$ défini par $\mathcal{A}\varepsilon_n = A_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ est borné en même temps que A (même borne), et sa matrice, *dans le système* (ε_n), n'est autre que la *transposée de* $\mathcal{A}'$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$.

On sait que $A = \mathcal{A}U$, U étant l'opérateur, unitaire ou unitaire à gauche, tel que $\mathcal{V}e_n = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$. On a $AX = \mathcal{A}UX = \mathcal{A}\xi$ pour tout $\xi = UX$. D'ailleurs $\xi = \sum_n x_n \varepsilon_n$ lorsque $X = \sum_n x_n e_n$.

Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ se décompose en *produit canonique fortement convergent d'opérateurs simples*.

2. Soit $\mathcal{A}_1$ l'opérateur tel que $\mathcal{A}_1\varepsilon_1 = A_1$, et $\mathcal{A}_1\varepsilon_n = \varepsilon_n$ pour $n \neq 1$. Il est borné, et l'on a, pour tout $\xi = \Sigma\xi_n\varepsilon_n$, $\mathcal{A}_1\xi = \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1)$.

([1]) *Comptes rendus*, 212, 1941, pp. 733-736.

En général, soit $\mathcal{A}_p$ l'opérateur tel que $\mathcal{A}_p \varepsilon_p = A_p$ et $\mathcal{A}_p \varepsilon_n = \varepsilon_n$ pour $n \neq p$. Il est borné et l'on a, pour tout ξ, $\mathcal{A}_p \xi = \xi + \xi_p(A_p - \varepsilon_p)$.

L'opérateur $\mathcal{A}_p$ laisse invariant tout vecteur de la variété $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}]$ et tout vecteur de la variété $[\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots]$. Il laisse donc aussi invariants les vecteurs $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$.

3. Le produit $\mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p-1} \ldots \mathcal{A}_1$ est borné. Il transforme ε_k en A_k, pour $k = 1, 2, \ldots, p$. Il laisse invariant tout vecteur de $[\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots]$.

Par ailleurs, désignons par $\mathcal{E}_p$ le projecteur qui projette l'espace $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots]$ sur l'espace $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p]$. L'opérateur $1 - \mathcal{E}_p$ projettera l'espace $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots]$ sur l'espace $[\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots]$; il transformera donc en zéro tous les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ et laissera invariant tout vecteur de $[\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots]$.

Il est alors évident que $\mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p-1} \ldots \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p$, en désignant par $\mathcal{A}^{(p)} = \mathcal{E}_p \mathcal{A} \mathcal{E}_p$ *l'opérateur réduit d'ordre* p que Hilbert attache à l'opérateur $\mathcal{A}$.

Lorsque p devient infini, $1 - \mathcal{E}_p$ converge fortement vers zéro et $\mathcal{A}^{(p)}$ converge fortement vers $\mathcal{A}$. Par conséquent, on peut écrire :

$\mathcal{A} = \ldots \mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p-1} \ldots \mathcal{A}_1$, avec *convergence forte vers* $\mathcal{A}$ *du produit infini* qui est au second membre. On en déduit le développement en produit infini fortement convergent de A par $A = \ldots \mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p-1} \ldots \mathcal{A}_1 U$.

4. Les opérateurs $\mathcal{A}_p$ de décomposition possèdent un spectre ponctuel très simple. On a, en effet, $\mathcal{A}_p \xi = \xi + \xi_p(A_p - \varepsilon_p)$. Par conséquent, pour que $\mathcal{A}_p \xi = \lambda \xi$, il faudra :

1° ou bien $\xi_p = 0$, avec $\lambda = 1$ et ξ quelconque dans la variété $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p+1}, \ldots]$. $\lambda = 1$ est valeur propre d'ordre infini.

2° ou bien $\xi_p \neq 0$ et $(\lambda - 1)\xi = \xi_p(A_p - \varepsilon_p)$. On reconnaît sans peine qu'il faut alors prendre $\lambda = \alpha_{pp} = (\varepsilon_p, A_p)$ et $\xi = a_p(A_p - \varepsilon_p)$, a_p étant un nombre complexe quelconque. Cette valeur propre est donc d'ordre un et la solution propre correspondante est $A_p - \varepsilon_p$ à un facteur scalaire près.

5. Il est clair que, pour un opérateur non borné A, défini par des A_n quelconques, la décomposition formelle se fait de la même manière, mais la question de la convergence est plus délicate. Soit $\xi = \Sigma \xi_n \varepsilon_n$. On aura $\mathcal{A}_1 \xi = \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1)$. Puis $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \xi = \mathcal{A}_2 \xi + \xi_1 \mathcal{A}_2(A_1 - \varepsilon_1)$. Mais, $A_1 - \varepsilon_1$ restant invariant par $\mathcal{A}_2$, on aura aussi

$$\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \xi = \mathcal{A}_2 \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1) = \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1) + \xi_2(A_2 - \varepsilon_2).$$

D'une façon générale

$$\mathcal{A}_p \mathcal{A}_{p-1} \ldots \mathcal{A}_1 \xi = \xi + \sum_{k=1}^{p} \xi_k(A_k - \varepsilon_k).$$

Si l'on suppose ξ tel que $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k A_k$ converge fortement, $\sum_{k=1}^{p}\xi_k(A_k-\varepsilon_k)$ convergera fortement vers $\Sigma\xi_k A_k - \Sigma\xi_k\varepsilon_k$, c'est-à-dire vers $\Sigma\xi_k A_k - \xi$. Il en résulte que $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1\xi$ converge fortement, pour $p=\infty$, vers $\Sigma\xi_k A_k = \mathfrak{A}\xi$, lorsque ξ appartient au domaine $d_{\mathfrak{A}}$ de convergence forte de $\Sigma\xi_k A_k$. La réciproque est immédiate puisque

$$\sum_{k=1}^{p}\xi_k A_k = \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1\xi - \xi + \sum_{k=1}^{p}\xi_k\varepsilon_k.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k A_k$ et le produit infini $\ldots\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1\xi$ ont donc *même domaine de convergence forte* $d_{\mathfrak{A}}$. C'est aussi le domaine de convergence forte des opérateurs réduits $\mathfrak{A}^{(p)}$ d'ordre p qu'Hilbert associe à $\mathfrak{A}$, la relation $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p$ étant toujours valable.

Si l'on se rappelle que $\xi = UX$ a, par rapport aux ε_k, les mêmes coordonnées que X par rapport aux e_k, $[\Sigma\xi_k\varepsilon_k = \Sigma\xi_k Ue_k = U\Sigma\xi_k e_k = UX]$, on voit que $\xi_k = x_k$ pour tout k, si $X = \Sigma x_k e_k$; par suite

$$AX = \Sigma x_k A_k = \Sigma\xi_k A_k = \mathfrak{A}\xi,$$

pour $\xi = UX$, et l'on obtient cette conclusion définitive : le produit canonique considéré $\ldots\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1 UX$ converge fortement vers $AX = \Sigma x_k A_k$ dans le même domaine d_A que la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k A_k$.

6. Le cas où les vecteurs A_n seraient des fonctions linéaires d'un nombre *fini* d'entre eux, qu'on peut appeler $A_1, \ldots, A_p$ (les $A_1, \ldots, A_p$ étant indépendants), n'est pas exclu de ce qui précède. Mais la règle de E. Schmidt ne fournit alors qu'un nombre fini p de vecteurs orthonormaux ε_n; on complétera ce système fini pour former un système orthonormal infini complet (ε_n). Les A_n s'exprimeront par des formes linéaires des ε_n, dont les coefficients sont tous nuls lorsqu'ils affectent un ε_n d'indice $n > p$. La matrice $\mathfrak{A}$ ne possède alors que p lignes non identiquement nulles. Tout ce qu'on a dit s'applique encore, mais peut être simplifié. Car, dans le cas présent, les opérateurs définis par $AX = \Sigma x_k A_k$ peuvent se traiter directement et le domaine de convergence forte d_A peut être déterminé de la façon la plus simple.

SPECTROSCOPIE. — *Application à des molécules intéressantes de l'analyse nouvelle des spectres moléculaires. Relations simples entre les fréquences d'une même molécule dans les états gazeux, liquide et solide.* Note de M. **Henri Deslandres.**

La Note actuelle est présentée sous le même titre que les trois Notes précédentes du 30 septembre, du 2 novembre 1940 et du 6 janvier 1941, auxquelles je prie le lecteur de se reporter. Ces Notes analysent et comparent les fréquences Raman des molécules H^2S, CS^2, $CHCl^3$ et CCl^4, relevées par les physiciens hindous, Sirkar et Gupta, dans les trois états gazeux, liquide et solide. Les auteurs ont signalé dans le cristal de ces molécules à la température de l'oxygène liquide, à — 180°, des fréquences nouvelles très petites, les points de fusion de ces molécules étant à — 83°, — 112°, — 63° et — 23°.

J'analyse aujourd'hui trois autres molécules, C^6H^6, C^6H^5Cl et C^6H^{12}, plus riches en atomes et en électrons, étudiées à la même température basse par les physiciens hindous (¹). Leurs points de fusion sont à + 5°,5, — 45° et + 6°,6; et, pour deux d'entre elles, la température de — 180°, à laquelle on relève de petites fréquences, est plus éloignée de leur point de fusion, et leur volume doit être plus voisin du covolume.

Le benzène C^6H^6 cristallisé a même deux groupes de petites fréquences, l'un à 0° avec les fréquences ν63 et 104, et l'autre à — 180° avec ν81, 98 et 124 (²). Or, en 1935, j'ai analysé déjà 11 fréquences du benzène liquide, mesurées avec soin (³); les deux fréquences les plus intenses, ν991,5 et ν3061,2, sont émises également l'une et l'autre par les deux arrangements des atomes $C^3H^3—C^3H^3$ du type A^2 (A étant un atome ou groupe d'atomes), et $C^6H^5—H$ du type ClH ou du type plus général $M\text{-}nH—H^n$, souvent rencontré dans les molécules hydrogénées. Ces deux fréquences

(¹) Les sources sont : C^6H^6, Sirkar, *Ind. J. Phys.*. 10, 1936, p. 189; C^6H^5Cl, Sirkar et Gupta, *Ind. J. Phys.* 11, 1937, p. 55; C^6H^{12}, Mitra, *Philos. Mag.*, 25, 1938, p. 895; Wenkates waran, *Ind. Acad. Sc.*, 8, 1938, p. 248; Cox, *Proceed R. S.*, London, 135, 1932, p. 491.

(²) Les petites fréquences du benzène à 0° ont été signalées en premier lieu par Gross et Vuchs, *Nature*, 135, 1935, p. 100 et 395; *Journ. de Physique*, 8, 1936, p. 113.

(³) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 603. Cette Note signale seulement les fréquences rattachées à $C^6H^5—H$; mais le nombre *n* des atomes H détachés peut varier de 1 à 6.

Tableau XXV. — *Analyse de fréquences infrarouges de molécules.*

Liste *Act.* — Nombres *s′* d'électrons des anneaux (a.), des sous-anneaux et anneaux (a′.) activables dans les atomes et groupes d'atomes des molécules C^6H^6, C^6H^5Cl, C^6H^{12} et de leurs polymères.

	C^6H^6.				C^6H^5Cl.						C^6H^{12}.			
	C^3H^3.	C^6H^5.	C^6H^4...	C^6H.	C^6.	C^6H^5.	Cl.	C^6H^4Cl.	C^6H^3Cl..	C^6Cl.	C^3H^6.	C^6H^{11}.	C^6H^{10}..	C^6.
1 a′...	9	17	16...	13	12	17	5	21	20....	17	12	23	22...	12
1 a...	15	29	28...	25	24	29	7	35	34....	31	18	35	34...	24
2 a′...							13	53	52....	49				
2 a...	21	41	40...	37	36	41	15	55	54....	51	24	47	46...	36
3 a...							17	57	56....	53				

Molécule et mode d'excitation.	Intensité entre ( ) et fréquence de la radiation en cm^{-1}.	Multiple correspondant de $d_1/s'r'$	et résidu.	Nombre *s′* d'électrons activés dans l'atome ou groupe d'atomes et nombre de sous-anneaux et d'anneaux activés (a′. et a.).
C^6H^6 cristal à 0° Raman.......	63	$= d_1/\ 17$	+0,5	17 de C^6H^5 1 a′. — 1 de H ou 34 de $C^{12}H^{10}$ 1 a′. — 2 de H^2.
42 électrons, 2 petites fréq.		$2d_1/\ 33$	−1,4	33 de $C^{12}H^9$ 1 a′. — 3 de H^3.
		$3d_1/\ 50$	−0,7	25 de C^6H 1 a. — 5 de H^5.
		$5d_1/\ 83$	−1,0	83 de $C^{12}H^{11}$ 2 a. — 1 de H.
		$5d_1/\ 84$	−0,8	42 de C^6H^6 2 a. — 42 de C^6H^6 2 a.
		$7d_1/117$	−0,6	39 de C^6H^3 2 a. — 3 de H^3.
		$7d_1/118$	−0,0	59 de $C^{12}H^{11}$ 1 a. — 1 de H.
	104	$= d_1/\ 10$	−2,2	40 de C^6H^4 2 a. — 2 de H^2.
		$4d_1/\ 41$	−0,3	41 de C^6H^5 2 a. — 1 de H.
		$5d_1/\ 51$	−0,2	17 de C^6H^5 1 a′. — 1 de H.
		$7d_1/\ 71$	−0,9	71 de $C^{24}H^{23}$ 1 a′. — 1 de H.
Cristal à −180° Raman.......	81	$= d_1/\ 13$	−0,7	39 de C^6H^3 2 a. — 3 de H^3.
3 petites fréquences.		$2d_1/\ 27$	−2,3	27 de C^6H^3 1 a. — 3 de H^3.
		$3d_1/\ 40$	+1,3	40 de C^6H^4 2 a. — 2 de H^2.
		$8d_1/105$	+0,0	15 de C^6H^3 1 a′. — 3 de H^3.
	124	$= 2d_1/\ 17$	−1,0	17 de C^6H^5 1 a′. — 1 de H.
		$7d_1/\ 60$	+0,0	15 de C^6H^3 1 a′. — 3 de H^3.
		$9d_1/\ 78$	+1,4	39 de C^6H^3 2 a. — 3 de H^3.
C^6H^5Cl cristal à −180° Raman.	(2) 49	$= d_1/\ 21$	−1,6	21 de C^6H^4Cl 1 a′. — 1 de H.
58 électrons, 4 petites fréq.		$d_1/\ 22$	+0,7	22 de C^6H^5Cl 1 a′. — 22 de C^6H^5Cl 1 a′.
		$4d_1/\ 85$	−1,0	17 de C^6H^5 1 a′. — 17 de Cl 3 a.
		$4d_1/\ 87$	+0,1	87 de $C^{24}H^{19}Cl^4$ 1 a′. — 1 de H.
	(1) 67	$= d_1/\ 16$	+0,6	32 de C^6HCl 1 a. — 4 de H^4.
		$4d_1/\ 63$	−0,5	21 de C^6H^4Cl 1 a′. — 1 de H.
		$5d_1/\ 80$	+0,6	20 de C^6H^3Cl 1 a′. — 2 de H^2.
	(1) 86	$= 2d_1/\ 25$	+1,0	100 pour 50 de C^6HCl 2 a′. — 4 de H^4.
		$8d_1/\ 99$	+0,1	33 de C^6H^2Cl 1 a. — 3 de H^3.
	(2) 103	$= 2d_1/\ 21$	+1,8	21 de C^6H^4Cl 1 a′. — 1 de H.
		$5d_1/\ 51$	−1,2	17 de C^6H^5 1 a′. — 17 de Cl 3 a.
C^6H^{12} cristal 48 électrons,	60	$= d_1/\ 18$	+1,0	18 de C^3H^6 1 a. — 18 de C^3H^6 1 a.
2 petites fréquences.				ou 18 de C^6H^6 1 a′. — 6 de H^6.
		$2d_1/\ 35$	−0,7	35 de C^6H^{11} 1 a. — 1 de H.
		$2d_1/\ 36$	+1,0	36 de C^6H^{12} 1 a. — 36 de C^6H^{12} 1 a.
		$4d_1/\ 69$	−1,6	23 de C^6H^{11} 1 a′. — 1 de H.
		$4d_1/\ 71$	+0,1	71 de $C^{12}H^{23}$ 1 a. — 1 de H.
	105	$= d_1/\ 10$	−1,2	20 de C^6H^8 1 a′. — 4 de H^4.
		$2d_1/\ 21$	+3,8	21 de C^6H^9 1 a′. — 3 de H^3.
		$7d_1/\ 71$	+0,2	71 de $C^{12}H^{23}$ 1 a. — 1 de H.

se retrouvent dans le benzène gazeux et aussi dans le cristal, diminuées de 2 à 3 unités. Ces petites diminutions ont été déjà signalées dans les molécules précédentes et expliquées simplement.

Il suffira d'analyser avec soin les petites fréquences qui sont les seules présentées dans le tableau XXV ci-dessus. Les deux petites fréquences du cristal benzène à 0° sont émises seulement par l'arrangement C^6H^{6-n} — H^n et ses polymères [4]. Dans l'état solide, les molécules ne se heurtent plus, leurs mouvements sont très réduits et leurs atomes d'hydrogène, très légers, sont les plus faciles à déplacer. Comme, de plus, le déplacement d'un seul atome H est plus facile, les deux fréquences ν 63 et 104, égales à $d_1/17$ et à $4d_1/41$ avec un résidu très faible, sont liées à l'arrangement C^6H^5 — H, les nombres 17 et 41 étant les nombres d'électrons du sous-anneau et des deux anneaux de C^6H^5. Les petites fréquences analysées dans les Notes précédentes ont donné un résultat analogue.

Le tableau indique les autres arrangements du type C^6H^{6-n} — H^n qui peuvent émettre les deux petites fréquences, arrangements qui sont astreints à la condition suivante : le nombre n doit être un sous-multiple du nombre s' de C^6H^{6-n}, car alors les deux parties C^6H^{6-n} et H^n, par un effet de résonance, peuvent émettre la même fréquence, conformément à la loi générale qui exige l'égalité des fréquences propres de toutes les parties de la molécule.

Le tableau annonce aussi la formation de polymères dans le cristal de C^6H^6. Pour chaque fréquence, l'analyse révèle les arrangements d'atomes et d'électrons qui ont assuré son émission. Les polymères de ces arrangements peuvent aussi émettre cette fréquence; mais, lorsque le nombre s' de l'arrangement est un nombre premier, le numéro du polymère qui lui correspond peut être souvent déterminé. Tel est le cas avec les nombres s' 71 et 83 des deux fréquences ν 104 et 63. Le nombre d'électrons des sous-anneaux de $C^{24}H^{23}$ est égal à 71 qui est un nombre premier, et la fréquence ν 104 est émise par l'arrangement $C^{24}H^{23}$ 1 a. — H du polymère n° 4 et non par la molécule simple et les polymères n°s 2 et 3. Comme les autres arrangements signalés dans le tableau peuvent être rattachés aussi au polymère n° 4, il apparaît que le spectre de ce polymère est constitué par les deux fréquences.

D'autre part l'étude de la diffraction des rayons X par la molécule,

---

[4] Il y a une exception à la cinquième ligne du tableau où l'arrangement est du type A^2.

poursuivie par Cox, a montré que la maille du cristal comprend 4 molécules. On peut admettre que le nouveau spectre du cristal-benzène à 0° est le spectre de sa maille.

Les petites fréquences du cristal à —180°, ν 81, ν 124 et ν 98 (cette dernière étant une bande) ont été publiées en 1935 par Sirkar qui ajoute : les deux premières fréquences proviennent évidemment du déplacement des fréquences ν 63 et 104 émises à 0°. Cette assertion me paraît prématurée; car, à ma connaissance, les fréquences émises entre 0° et —180° n'ont pas encore été mesurées. Le tableau donne l'analyse ordinaire des fréquences à —180°, analyse moins nette et moins suggestive que les précédentes.

Or la formule générale (1) $\nu = qd_1/s'r'$, sur laquelle l'analyse nouvelle est appuyée, a été vérifiée sur plus de 300 molécules de types très divers, mais seulement dans les états gazeux et liquide. Il est possible qu'elle soit à modifier dans l'état solide aux températures très basses, lorsque le covolume peut intervenir. Cette étude sera reprise lorsque les données expérimentales seront suffisantes [5].

Le tableau donne ensuite l'analyse des quatre petites fréquences du chlorobenzène C^6H^5Cl à —180°. De même qu'avec les molécules précédentes, ces fréquences sont liées à des arrangements dans lesquels un ou plusieurs atomes de H sont détachés. Le nombre s' 87 de ν 49 a été rattaché à $C^{24}H^{19}Cl^4$ 1 a'. — H, soit à 4 molécules, et la maille du cristal comprendrait 4 molécules, comme dans le cristal du benzène; mais le nombre 87 n'est pas premier, il est égal à 29 × 3, et la conséquence suggérée sur la maille est douteuse.

Enfin le tableau présente l'analyse des deux fréquences du cyclohexane C^6H^{12}. Comme précédemment, les arrangements dans lesquels un ou plusieurs atomes de H sont séparés des autres atomes prédominent. De plus, les nombres s' 36 et 71 de ν 64, le nombre s' 71 de ν 103 annoncent la formation du dimère de la molécule, et 71 est un nombre premier. Il est très probable que la maille du cyclohexane est constituée par 2 molécules.

---

(5) Les publications des physiciens hindous, très importantes sur l'effet Raman, sont peu répandues en France; la bibliothèque de l'Université de Paris ne les reçoit plus depuis 1937. Si l'on excepte le volume du jubilé Raman de 1938, qui m'a été communiqué en mars dernier, je n'ai pas eu à ma disposition les publications de 1938 à 1940.

Je rappelle que, dans la formule (1), s' est le nombre des électrons activés par sous-anneaux et anneaux dans un atome ou groupe d'atomes de la molécule, et que d_1 est la constante universelle 1062,5; q et r' sont des nombres entiers.

En résumé, lorsque Sirkar et Gupta ont publié leurs premières recherches à —180°, on a pu croire que les petites fréquences étaient spéciales aux températures très basses. Mais l'étude du benzène, et surtout de 14 composés organiques par Venkateswaran, un peu au-dessous du point de fusion, ont montré qu'elles sont un caractère de l'état solide. L'analyse nouvelle permet de préciser davantage et les rapporte à la maille cristalline ou à l'élément primordial dont la répétition forme le cristal. Avant de présenter une conclusion ferme, il faut attendre que la recherche expérimentale soit complète ou largement suffisante.

M. **Louis de Broglie** fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage intitulé *Continu et discontinu en Physique moderne*, qu'il vient de publier dans la collection *Sciences d'aujourd'hui*, dirigée par M. André George. Dans ce livre, qui fait suite à l'Ouvrage intitulé *Matière et Lumière* paru antérieurement dans la même collection, l'auteur a réuni un certain nombre d'articles ou d'exposés relatifs à l'évolution contemporaine de la Physique, ainsi qu'à la philosophie ou à l'histoire de cette science. Il a particulièrement insisté sur l'aspect que prend dans les théories actuelles de la Physique l'antinomie du continu et du discontinu, ainsi que sur les formes les plus récentes de la théorie de la lumière.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° André Boivin. *Bactéries et virus*.

2° L. Escande. *Étude de quelques écoulements comportant la formation d'une veine de courant. Vannes de fond, barrages-déversoirs, piles de ponts* (transmis par M. Ch. Camichel).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Probabilités des oscillations maxima*. Note (¹) de M. **Louis Bachelier**.

La loi généralisée qui régit les probabilités des écarts est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx.$$

(¹) Séance du 12 mai 1941.

x est l'écart, il peut être relatif à la théorie des épreuves répétées ou des grands nombres, à la théorie mathématique du jeu, à la spéculation, au mouvement brownien, aux probabilités cinématiques et à toutes autres questions analogues.

t est une variable continue que je nommerai le temps et qui, dans la théorie des grands nombres, exprime une suite d'épreuves.

$\varphi(t)$ est une fonction soit arbitraire soit donnée du temps, soumise à la condition d'être positive et croissante et nommée *fonction d'instabilité*.

La formule ci-dessus exprime la probabilité pour que l'écart soit x (compris entre x et $x+dx$) à l'époque t, c'est-à-dire au bout du temps t.

Le but de cette Note est de faire connaître de nouveaux résultats relatifs au plus grand écart, à l'écart maximum et à l'oscillation maxima.

I. La probabilité pour que *le plus grand écart* positif qui se produit dans l'intervalle de temps t ait pour valeur x s'obtient en doublant la probabilité de l'écart x au bout du temps t, comme je l'ai démontré précédemment.

Pour ce genre de questions, on peut résoudre des problèmes plus compliqués et intéressants : par exemple, la probabilité pour que, dans l'intervalle de temps T, le plus grand écart positif soit x, pour qu'il soit atteint à l'époque $t\,(t<\mathrm{T})$ et pour que finalement l'écart soit z à l'époque T, est exprimée par la formule

$$\frac{4x\,\varphi'(t)\,e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}(x-z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{\varphi(\mathrm{T})-\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}\,[\varphi(\mathrm{T})-\varphi(\mathrm{T})]\sqrt{\varphi(\mathrm{T})-\varphi(t)}}\,dx\,dz\,dt,$$

où $\varphi'(t)$ est la dérivée de $\varphi(t)$.

II. *L'écart maximum* qui se produit dans l'intervalle de temps t est le plus grand écart en valeur absolue, par exemple; si le plus grand écart positif est $+3$ et si le plus grand écart négatif est -7, l'écart maximum est 7.

J'ai fait connaître dans mes études antérieures la probabilité pour que l'écart maximum soit x; il est intéressant de résoudre le problème inverse : La probabilité pour que l'écart maximum donné x soit atteint exactement à l'époque t (entre t et $t+dt$), est donnée par la formule

$$\frac{2\,\varphi'(t)\,x}{\sqrt{\pi}\,\varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}}\left[e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}-3\,e^{-\frac{(3x)^2}{\varphi(t)}}+5\,e^{-\frac{(5x)^2}{\varphi(t)}}-7\,e^{-\frac{(7x)^2}{\varphi(t)}}+9\,e^{-\frac{(9x)^2}{\varphi(t)}}-\ldots\right]dt.$$

III. *L'oscillation maxima* dans l'intervalle de temps t est la somme arithmétique du plus grand écart positif et du plus grand écart négatif.

Par exemple, si le plus grand écart positif est $+3$ et si le plus grand écart négatif est -7, l'oscillation maxima est 10.

Cette notion est intéressante dans la théorie mathématique de la spéculation, où elle désigne la différence entre le plus haut et le plus bas cours cotés dans l'intervalle de temps t. Elle est utile également dans toutes les études citées précédemment.

Dans mon Ouvrage, *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*, j'ai fait connaître la probabilité pour que l'oscillation maxima soit x dans l'intervalle de temps t. La formule suivante résout le problème inverse :

La probabilité pour que l'oscillation maxima donnée x soit atteinte exactement à l'époque t (entre t et $t+dt$) est

$$\frac{4\varphi'(t)x}{\sqrt{\pi\varphi(t)}\sqrt{\varphi(t)}}\left[e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}} - 2^2 e^{-\frac{2^2x^2}{\varphi(t)}} + 3^2 e^{-\frac{3^2x^2}{\varphi(t)}} - 4^2 e^{-\frac{4^2x^2}{\varphi(t)}} + 5^2 e^{-\frac{5^2x^2}{\varphi(t)}} - \ldots\right]dt.$$

On peut également connaître la probabilité pour que, dans l'intervalle de temps t, l'oscillation maxima soit x et l'écart maximum y. Cette probabilité est exprimée par la somme de deux séries, sa valeur est

$$\begin{aligned}\frac{4\,dx\,dy}{\sqrt{\pi}\,\varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}}\Big[\; & 1.2(2x-y)e^{-\frac{(2x-y)^2}{\varphi(t)}} - 2.3(2x+y)e^{-\frac{(2x+y)^2}{\varphi(t)}} \\ & + 3.4(4x-y)e^{-\frac{(4x-y)^2}{\varphi(t)}} - 4.5(4x+y)e^{-\frac{(4x+y)^2}{\varphi(t)}} \\ & + 5.6(6x-y)e^{-\frac{(6x-y)^2}{\varphi(t)}} - \ldots \\ & + 1.2(\;x+y)e^{-\frac{(x+y)^2}{\varphi(t)}} - 2.3(3x-y)e^{-\frac{(3x-y)^2}{\varphi(t)}} \\ & + 3.4(3x+y)e^{-\frac{(3x+y)^2}{\varphi(t)}} - 4.5(5x-y)e^{-\frac{(5x-y)^2}{\varphi(t)}} \\ & \qquad + 5.6(5x+y)e^{-\frac{(5x+y)^2}{\varphi(t)}} - \ldots\Big].\end{aligned}$$

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur quelques exemples de factorisation de variables aléatoires.* Note de M. **Daniel Dugué**, présentée par M. Émile Borel.

1. *Décomposition de la loi de Laplace.* — La loi de Laplace ($1/2\, e^{-|x|}\, dx$) a pour fonction caractéristique $1/(1+z^2)$, qui peut se mettre sous la forme du produit $[1/(1+iz)]\,[1/(1-iz)]$.

$1/(1+iz)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ayant pour fonction de distribution $e^{-|x|}$ pour $x<0$ et 0 pour $x>0$.

$1/(1-iz)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ayant pour fonction de distribution $e^{-|x|}$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$.

Une variable de Laplace possède donc cette particularité d'être la somme de deux variables suivant des lois obtenues en prenant la moitié positive et la moitié négative de la loi de distribution de la somme.

Aucune variable aléatoire ayant pour fonction caractéristique une fonction entière d'ordre fini ne jouit de cette propriété, qui caractérise peut-être la loi de Laplace.

2. *Sur une propriété de la loi de Poisson.* — On sait qu'une variable gaussienne ne peut être décomposée en une somme de deux variables indépendantes que si ces deux variables suivent une loi de Gauss. (Résultat de MM. Lévy et Cramer.)

De même, une loi de Poisson ne peut être décomposée en deux variables indépendantes que si ces deux variables suivent une loi de Poisson. (Résultat de M. Raikoff.) Si l'on suppose qu'aucune des variables A et B ne peut être décomposée en deux variables indépendantes dont l'une est de Gauss (ou de Poisson), que peut-on dire de la somme A + B? On ne connaît encore aucun résultat pour la loi de Gauss. L'exemple suivant, inspiré des méthodes de M. Paul Lévy [*Sur les exponentielles de polynomes* (*Ann. École Norm. sup.*, 1937)], prouve que la somme A + B peut fort bien contenir une loi de Poisson A et B n'en contenant pas. Nous considérons dans ce paragraphe les fonctions génératrices $f(z) = \Sigma p_n z^n$.

Soit A tel que

$$f_A(z) = \frac{\lambda}{\lambda+1} e^{\frac{z}{\lambda} - \frac{z^2}{2\lambda^2} + \frac{z^3}{3\lambda^3} - \frac{z^4}{4\lambda^4} + \dots} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) \qquad (\lambda > 1);$$

A est une variable aléatoire prenant la valeur zéro avec la probabilité $\lambda/(\lambda+1)$ et un avec la probabilité $1/(1+\lambda)$. Elle est donc indécomposable et en particulier ne contient aucune variable de Poisson.

Prenons B tel que

$$f_B(z) = k\, e^{\frac{z^2}{2\lambda^2} + \frac{z^4}{4\lambda^4} + \frac{z^6}{6\lambda^6} + \dots} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{\lambda^2}}}.$$

Cette fonction sera évidemment génératrice puisque tous les termes du développement auront des coefficients positifs. Elle ne contient pas de variable de Poisson car, la fonction génératrice de la loi de Poisson

étant $e^{C(z-1)}$ ($C > 0$), il faudrait que

$$e^{-C(z-1)+\frac{z^2}{2\lambda^2}-\frac{z^4}{4\lambda^4}+\dots}$$

fût fonction génératrice, ce qui est impossible, le premier terme du développement ayant un coefficient négatif.

Par contre on a $A + B$ tel que

$$f_A(z)\,f_B(z) = f_{A+B}(z) = \frac{\lambda}{\lambda+1}\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}\,e^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^3}{3\lambda^3}+\frac{z^5}{5\lambda^5}+\dots}.$$

Cette variable contient le facteur de Poisson $e^{\frac{z-1}{\lambda}}$. Cet exemple montre une des différences, soulignées par M. Paul Lévy dans le travail cité, entre l'arithmétique des variables aléatoires et l'arithmétique des entiers, dans laquelle, si A et B ne contiennent pas de facteur de la forme p^n (p premier), AB n'en contient pas non plus.

3. *Décomposition de lois uniformes.* — La fonction caractéristique de la variable aléatoire x, répartie avec une densité uniforme dans l'intervalle $-1/2, +1/2$, est $\sin z/z$. On a

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2^2}\cdots\cos\frac{z}{2^n}\cdots;$$

$\cos z/2^n$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire indécomposable prenant les valeurs $1/2^n$ et $-1/2^n$ avec les probabilités $1/2$.

La variable aléatoire x est donc ramenée à une somme de variables indécomposables et $\varphi(z)$ à un produit de facteurs *premiers*. $\varphi(z)$ admet évidemment comme facteur tous les produits de ces facteurs premiers. Elle admet de plus des facteurs qui ne peuvent se réduire à cette forme comme $(\sin z/n)(z/n)$, n étant un entier qui n'est pas une puissance de 2.

On a ainsi un nouvel exemple du fait signalé à la fin du paragraphe précédent.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *La loi des grands nombres pour des variables aléatoires liées et des événements liés.* Note (¹) de M. **Michel Loève**, présentée par M. Émile Borel.

1. *Variables aléatoires.* — Soient des variables aléatoires généralement liées $X_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$, de valeur moyenne $\mathfrak{M}(X_{n,i}) = 0$.

(¹) Séance du 5 mai 1941.

Désignons par des lettres accentuées les quantités relatives à $X_{n,i}$ calculées dans l'hypothèse où l'on connaît les résultats des épreuves relatives à $X_{n,1}, \ldots, X_{n,i-1}$, et par le préfixe « sup » la borne supérieure d'une telle quantité quand ces résultats varient. Soit $S_{n,\nu} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,\nu}$.

Théorème. — Supposons que n tende vers l'infini,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0.$$

a. Si $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$ reste borné, alors

$$\mathfrak{M}(S_{n,n}^2) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \to 0;$$

extension de l'égalité de Bienaymé.

b. Si $M^2 > \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$, alors

$$\Pr\left\{\left|\frac{S_{n,n}}{M_n}\right| > c\right\} < \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{M_n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) + \varepsilon_n\right].$$

où $\varepsilon_n \to 0$ avec $1/n$ et $c > 0$ est une constante arbitraire.

c. Si $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \to 0$, la suite $\{S_{n,n}\}$ est stable [2].

d. Si $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$ reste borné, la suite $\{S_{n,n}\}$ est bornée en probabilité.

Une suite $\{X_n\}$ sera dite *bornée en probabilité* si, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N(\varepsilon)$

$$\Pr\left\{|X_n| < \frac{1}{\varepsilon}\right\} > 1 - \varepsilon.$$

Lorsque la suite $\{X_n/\varphi_n\}$, où φ_n est une fonction certaine de n, est bornée en probabilité : 1° si φ_n est un infiniment grand avec n, X_n sera dit d'un *ordre de grandeur, en probabilité*, au plus égal à celui de φ_n; 2° si φ_n est un infiniment petit avec $1/n$, X_n sera dit un *infiniment petit*, *en probabilité*, d'un ordre au moins égal à celui de φ_n.

---

(2) La suite $\{s_n\}$ est (normalement) stable si $s_n - \mathfrak{M}(s_n) \to 0$ en probabilité (terminologie de Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933, p. 50).

Plaçons-nous dans le cas où $X_{n,i}=X_i/a_n$, $a_n>0$ certain et $\mathfrak{M}(X_i)=0$. Soit $S_n=X_1+\ldots+X_n$.

c'. Lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires telles que, pour $n\to\infty$,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_i)|\to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_i^2)\to 0,$$

la suite $\{S_n/a_n\}$ est stable.

En supposant les X_i mutuellement indépendantes et $a_n=n$, on retrouve le résultat classique de Tchebichef.

Un cas particulier de D devient :

d'. Lorsque $(1/a_n\sqrt{n})\sup|\mathfrak{M}'(X_i)|\to 0$ et que les $\mathfrak{M}(X_i^2)/a_n^2$ sont bornés dans leur ensemble, l'ordre de grandeur de S_n/a_n est, en probabilité, au plus celui de $\sqrt{n}$. En supposant les X_i mutuellement indépendantes et $a_n=1$, on retrouve un autre résultat classique.

2. *Événements.* — L'application à une suite $\{A_i\}$ d'événements généralement liés donne, en désignant par f_n la fréquence des n premiers et appelant suite stable d'événements celle dont la suite des $f_n-\overline{f_n}$ est stable :

Lorsque $n\to\infty$, la suite $\{A_i\}$ est stable et de plus $f_n-\overline{f_n}$ est, en probabilité, un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de $1/\sqrt{n}$ si

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sup|\Pr'(A_i)-\Pr(A_i)|\to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

En supposant les événements mutuellement indépendants, on retrouve le théorème de Bernoulli-Poisson.

Si

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\sup|\Pr'(A_i)-\Pr(A_i)|\to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},\ \alpha>0,$$

la suite $\left\{n^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(f_n-\overline{f_n}\right)\right\}$ est stable.

Posons

$$\sum_{i=1}^{n}\Pr(A_i)=np_1(n), \qquad \sum_{1\leq i<j\leq n}\Pr(A_iA_j)=C_n^2p_2(n)$$

et

$$d_n^2=|p_2(n)-p_1^2(n)|=0 \qquad \text{(nulle dans le cas de Bernoulli).}$$

Une étude directe montre que :

1° La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de la suite $\{A_i\}$ est que $d_n \to 0$ avec $1/n$.

Lorsque, de plus, $n d_n^2 \to \infty$ avec $1/n$, $f_n - \overline{f_n}$ est, en probabilité, un infiniment petit au moins de l'ordre de d_n.

2° Lorsque la suite $\{A_i\}$ est stable,

$$\mathfrak{M}(X_n)p_1(n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\mathfrak{M}_{A_i}(X_n) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

où X_n, à fluctuation bornée par un nombre fini indépendant de n, dépend des valeurs aléatoires $\text{Indic}(A_1)\ldots\text{Indic}(A_n)$ et $\mathfrak{M}_{A_i}(X_n)$ désigne la valeur moyenne de X_n évaluée lorsque A_i a lieu.

C'est l'extension au cas d'une suite stable de la relation des moyennes conditionnées ([3]).

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Diverses remarques concernant les effets thermiques qui accompagnent le déplacement relatif d'un solide et d'un fluide.* Note ([1]) de M. **Edmond Brun**, présentée par M. Henri Villat.

Les effets thermiques qui accompagnent le déplacement relatif d'un solide et d'un fluide ont fait l'objet de quelques travaux récents. La confrontation des résultats donnés et des résultats antérieurs (1931-1936) que j'ai obtenus, en partie en collaboration ([2]), donne lieu aux remarques suivantes.

1. Hilton ([3]) (1938) a mesuré, pour des nombres de Reynolds $\mathcal{R} = vd/\nu$ compris entre $0{,}8.10^5$ et $3{,}6.10^5$, la différence de température permanente θ qui existe entre un point d'une plaque plane situé à la distance d du bord d'attaque et le courant d'air qui lèche cette plaque à la vitesse v. Il trouve, pour deux points situés à des distances différentes du bord

---

([3]) Voir, par exemple, Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des Probabilités*, 1, 1937, p. 128.

([1]) Séance du 12 mai 1941.

([2]) Brun et Vernotte, *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 594; Brun et Vernotte, *ibid.*, 195, 1932, p. 302; Brun, *ibid.*, 196, 1933, p. 1960; Brun, *ibid.*, 198, 1934, p. 899; Brun, *ibid.*, 198, 1934, p. 1213; Brun et Lecardonnel, *ibid.*, 202, 1936, p. 555.

([3]) *Proceedings of the Royal Society*, 168, 25 novembre 1938, p. 43.

d'attaque B, les relations suivantes (v en cm/s) :

Point le plus proche de B.......... $\theta = 4,36.10^{-8}\, v^2$
» éloigné » .... $\theta = 4,5\ .10^{-8}\, v^2$

Les résultats de mes mesures, effectuées dans les mêmes conditions (surface parallèle à la vitesse du courant d'air) et jusqu'à des nombres de Reynolds dépassant 10^6, se traduisent par l'expression

$$\theta = 4,2.10^{-8}\, v^2,$$

tandis que mes mesures effectuées sur des disques en rotation dans l'air immobile donnent des résultats convenablement représentés par la loi

$$\theta = 4,4.10^{-8}\, v^2.$$

Étant donné la dispersion des points expérimentaux autour de la courbe moyenne (dispersion du même ordre dans les expériences de Hilton et dans les miennes), on peut conclure à la concordance des résultats des diverses mesures.

2. La théorie de Polhausen (*Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, I, 1921), qui suppose l'écoulement laminaire, conduit, dans les conditions des expériences précédentes, à la loi

$$\theta = 4,4.10^{-8}\, v^2.$$

L'accord est excellent. Cependant, si, dans les expériences de Hilton, l'écoulement est vraisemblablement toujours laminaire, dans mes essais j'ai dépassé la vitesse critique. Ainsi aucune discontinuité n'apparaît dans la loi quand on passe du régime laminaire au régime intermédiaire. Faut-il penser qu'au début du régime de transition la couche laminaire secondaire joue le rôle prépondérant dans le phénomène d'échauffement du solide ?

Rappelons en outre que mes mesures dans des fluides autres que l'air montrent que l'équation de Polhausen est aussi vérifiée pour des gaz d'atomicité différente de deux.

3. Hilton indique le principe de mesures destinées à l'étude de la répartition des températures aux divers points d'un corps profilé placé dans un courant d'air. Le calcul qu'il fait ne tient pas compte de la variation de température le long des filets d'air de l'écoulement potentiel qui contournent le profil ; quand la surface n'est plus plane et que, de ce fait, la

vitesse locale varie, la température locale de la paroi varie également et cela pour deux raisons : 1° la température n'est pas uniforme dans le fluide libre qui avoisine l'obstacle; 2° l'effet thermique dû au frottement varie comme le carré de la vitesse. Dans une publication technique (5), j'ai donné le calcul général de la répartition des températures et les vérifications expérimentales que j'en ai faites sur une maquette d'aile d'avion et sur une aile en vraie grandeur.

4. Les mesures de Hilton ont permis d'atteindre des nombres de Mach plus élevés que les miens (0,6). Il semble, d'après ces mesures, que le coefficient K de la loi $\theta = \mathrm{K}v^2$ soit indépendant, non seulement du nombre de Reynolds, mais encore du nombre de Mach.

Des mesures ont été effectuées, en 1937, à La Courneuve par M. Sédille et Ménard (6), avec de l'air chaud (jusqu'à 500°) et des nombres de Mach élevés (jusqu'à 0,93). Elles ont conduit à la formule

$$\theta = 3.2.10^{-8}v^2.$$

Ainsi la loi en v^2 se conserve dans ce nouveau domaine de températures, le coefficient K différant en somme assez peu de celui qui est valable aux températures peu élevées.

Au cours des essais de la Courneuve, il a été vérifié, comme je l'avais constaté dans d'autres conditions, que la température moyenne prise par un solide de petites dimensions est à peu près indépendante de sa forme.

AÉRODYNAMIQUE. — *Sur l'effet de souffle d'un tandem d'hélices tournant en sens inverse, sur la portance de l'avion complet et sur le rendement propulsif de l'hélice.* Note de M. **Robert Silber**, présentée par M. Henri Villat.

En effectuant des mesures aérodynamiques sur une maquette d'avion étudiée successivement en planeur, puis munie d'une hélice tripale simple et enfin d'un tandem de deux hélices (1), nous avons pu voir que *le coefficient unitaire de puissance de l'avion complet* $\overline{\mathrm{C}_v}$ (2) était amélioré

(5) Brun, *Public. scient. et techn. du Ministère de l'Air*, 119, 1938.

(6) Résultats inédits communiqués par M. Sédille.

(1) Robert Silber, *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 600.

(2) Robert Silber, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 716.

de 3 à 4 % quand on passait d'une hélice tripale simple à un tandem de deux hélices.

Le coefficient unitaire de portance de l'avion complet $\overline{C_z}$ (²) est lui aussi amélioré, non seulement par rapport au planeur, comme il fallait s'y

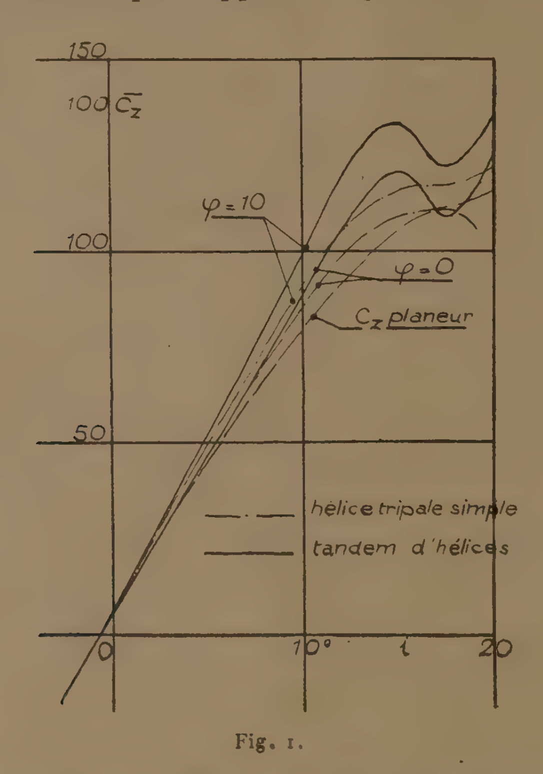


Fig. 1.

attendre (³), mais aussi par rapport à l'avion muni d'une seule hélice, comme le montre la figure 1 pour chaque valeur de l'angle de vol *i* (²). La comparaison a été faite pour le vol horizontal ($\varphi = 0°$) et pour le vol en montée ($\varphi = 10°$). Pour des angles de vol réellement utilisées, le gain sur $\overline{C_z}$ apparaît comme aussi important que celui déjà réalisé sur $\overline{C_x}$.

Nous avons pu construire ainsi les polaires de l'avion complet dans les deux cas. La figure 2 montre l'amélioration importante que représente l'avion muni d'hélices en tandem par rapport à l'avion muni d'une hélice simple.

Cette augmentation de portance si notable de l'avion muni du tandem doit être attribuée à la régularité plus grande du souffle de l'hélice sur l'avion.

(³) Robert Silber, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 958.

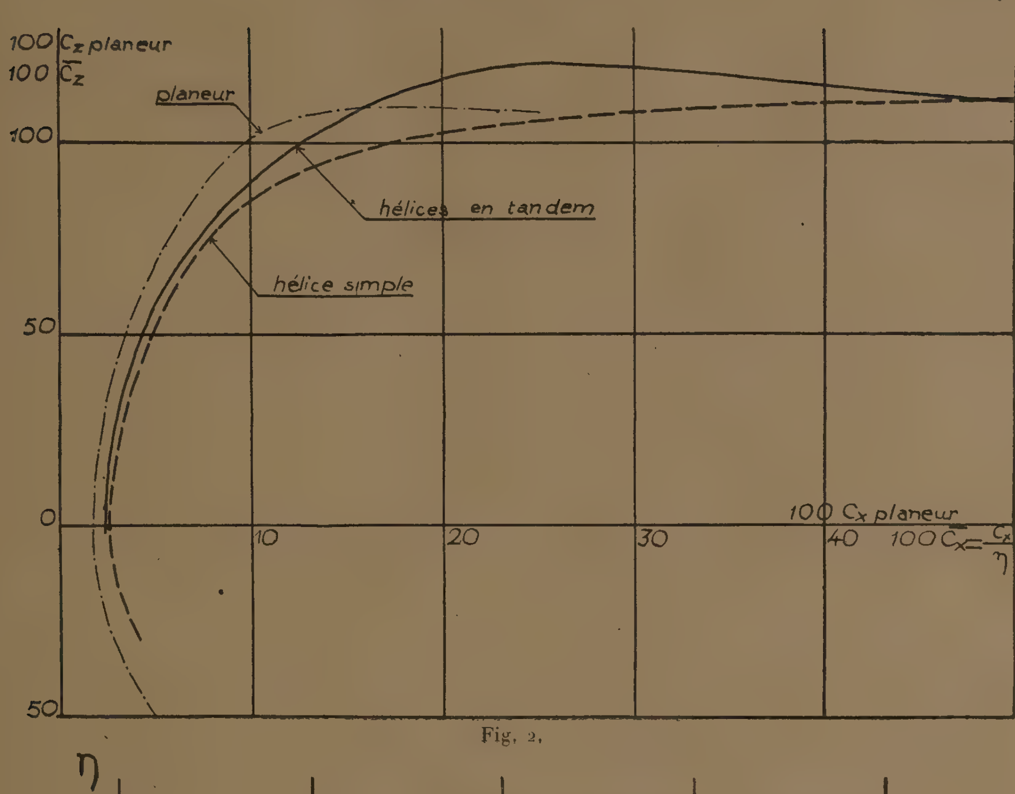

100 Cz planeur
100 C̄z
planeur
100
hélices en tandem
hélice simple
50
0
10
20
30
40
100 Cx planeur
100 C̄x = Cx/η
50

Fig. 2.

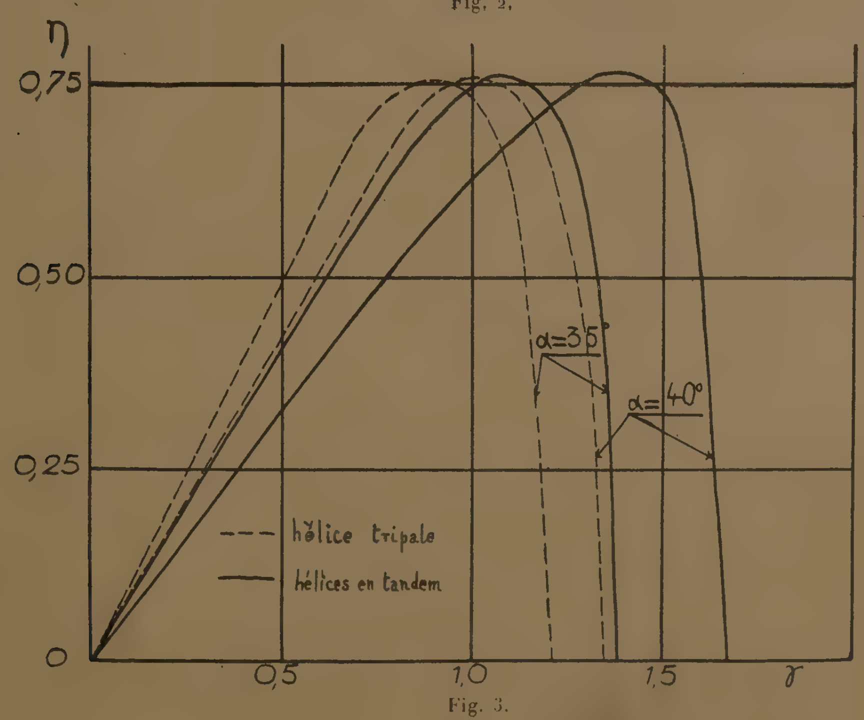

η
0,75
0,50
0,25
0
0,5
1,0
1,5
γ
α=35°
α=40°
hélice tripale
hélices en tandem

Fig. 3.

La figure 3 montre les gains de *rendement propulsif de l'hélice* η (⁴) obtenus en remplaçant l'hélice tripale par les deux hélices du tandem; les pales sont semblables (1/7) à ceux d'une même hélice Ratier de 2ᵐ,15 de diamètre. La comparaison est faite en calant les pales au même angle α sur l'hélice tripale et sur les deux hélices en tandem. On voit que, pour un même calage, le rendement propulsif maximum des hélices en tandem est légèrement augmenté et correspond à un paramètre de fonctionnement de l'hélice γ (¹) notablement plus élevé que celui de l'hélice unique.

Ainsi la substitution du tandem d'hélices tournant en sens inverse à une hélice tripale améliore non seulement le rendement propulsif de l'hélice, mais aussi les qualités aérodynamiques de l'avion complet.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Application de la transformation de Sundman au problème d'Euler.* Note [1] de M. **Pierre Sémirot**, présentée par M. Jean Chazy.

Un point matériel M est attiré par deux centres fixes A, B suivant la loi de Newton.

Prenons A comme origine des coordonnées; dirigeons l'axe des x suivant AB; soient x, y, z les coordonnées de M; soient c, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\rho=\sqrt{r^2+c^2-2cx}$ les distances AB, AM, BM; soient enfin K, K′ les coefficients attractifs des centres B et A.

1. u désignant la variable définie par la relation $dt = r\,du$, le système différentiel classique, par la transformation de Sundman, devient

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dr}{du}=r', \qquad \dfrac{dr'}{du}=r\left[\dfrac{K'}{r}+\dfrac{2K}{\rho}+\dfrac{K}{\rho^3}(cx-r^2)-h\right], \qquad \dfrac{dt}{du}=r, \\ \dfrac{dx}{du}=x', \qquad \dfrac{dy}{du}=y', \qquad \dfrac{dz}{du}=z', \\ \dfrac{dx'}{du}=\dfrac{x'r'-K'x}{r}+\dfrac{Kr^2}{\rho^3}(c-x), \qquad \dfrac{dy'}{du}=\dfrac{y'r'-K'y}{r}-\dfrac{Kr^2y}{\rho^3}, \\ \dfrac{dz'}{du}=\dfrac{z'r'-K'z}{r}-\dfrac{Kr^2z}{\rho^3}. \end{array}\right.$$

(⁴) $\eta = \mathrm{TV/W}$; T, effort de traction de l'hélice; V, vitesse de l'avion; W, puissance motrice.

(¹) Séance du 12 mai 1941.

Les intégrales des forces vives et des aires se transforment en les deux équations

$$x'^2+y'^2+z'^2=r^2\left[2\left(\frac{K}{\rho}+\frac{K'}{r}\right)-h\right]=r^2(2U-h), \qquad yz'-zy'=rg,$$

où h et g sont les constantes correspondantes.

2. Si l'on prend B pour origine, et si l'on introduit de même la variable v définie par la relation $dt=\rho\,dv$, on forme un système différentiel analogue au système (I), et en particulier l'équation

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{d\rho}{dv}\right)=\rho\left[\frac{K}{\rho}+\frac{2K'}{r}-\frac{K'}{2r^3}(r^2+\rho^2-c^2)-h\right].$$

3. Compte tenu des deux intégrales, les variables x, y, z, x', y', z' s'expriment en fonction des variables r, ρ, r', ρ'. Par suite nous pouvons former un système de cinq équations entre les cinq fonctions r, ρ, r', ρ', t de la variable indépendante u, soit

$$\frac{dr}{du}=r', \qquad \frac{dr'}{du}=r\left[\frac{K'}{r}+\frac{2K}{\rho}-\frac{K}{2\rho^3}(r^2+\rho^2-c^2)-h\right], \qquad \frac{dt}{du}=r,$$

$$\frac{d\rho}{du}=\rho', \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\rho\rho'}{r}\right)=r\left[\frac{K}{\rho}+\frac{2K'}{r}-\frac{K'}{2r^3}(r^2+\rho^2-c^2)-h\right].$$

4. L'intégrale des forces vives se transforme en l'équation

$$\rho^2r^2\rho'^2+\rho^2r^2r'^2-\rho r\rho' r'(\rho^2+r^2-c^2)=r^2\left\{[4c^2r^2-(r^2+c^2-\rho^2)^2]\left[\frac{2U-h}{4}\right]-g^2c^2\right\}.$$

L'expression $(\rho\rho'/r)(dr'/du)+r'(d/du)(\rho\rho'/r)$ est une dérivée exacte et donne par intégration l'équation

$$\rho r\rho' r'=\frac{r^2}{2}\left[K\frac{(3\rho^2+r^2-c^2)}{\rho}+K'\frac{(3r^2+\rho^2-c^2)}{r}-h(\rho^2+r^2)+\alpha\right],$$

où α désigne une constante arbitraire.

En combinant cette dernière équation et l'équation transformée de l'intégrale des forces vives, nous obtenons la double équation, valable soit avec les signes supérieurs, soit avec les signes inférieurs,

$$r^2\rho^2(r'\pm\rho')^2=r^2\Big\{K'[(r\pm\rho)^3-c^2(r\pm\rho)]+K[(\rho\pm r)^3-c^2(\rho\pm r)]$$
$$-\frac{h}{4}[(r\pm\rho)^4-c^4]+\frac{\alpha}{2}[(r\pm\rho)^2-c^2]-g^2c^2\Big\}.$$

5° La somme et la différence des variables ρ, r étant en évidence, posons

$$r+\rho=\lambda, \qquad r-\rho=\mu,$$

$$f(\lambda)=-\frac{h}{4}\lambda^4+(\mathrm{K}+\mathrm{K}')\lambda^3+\frac{\alpha}{2}\lambda^2-(\mathrm{K}+\mathrm{K}')c^2\lambda+\frac{h}{4}c^4-\frac{\alpha}{2}c^2-g^2c^2,$$

$$\varphi(\mu)=-\frac{h}{4}\mu^4+(\mathrm{K}-\mathrm{K}')\mu^3+\frac{\alpha}{2}\mu^2-(\mathrm{K}-\mathrm{K}')c^2\mu+\frac{h}{4}c^4-\frac{\alpha}{2}c^2-g^2c^2.$$

L'équation obtenue se décompose en les deux équations

$$\frac{(\lambda-\mu)^2}{4}\lambda'^2=f(\lambda), \qquad \frac{(\lambda-\mu)^2}{4}\mu'^2=\varphi(\mu),$$

d'où

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}=\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}}, \qquad dt=\frac{1}{4}\left[\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}-\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}}\right].$$

L'angle d'azimut φ autour de la droite AB est donné par la quadrature résultant de l'expression

$$d\varphi=gc^2\left[\frac{d\lambda}{(\lambda^2-c^2)\sqrt{f(\lambda)}}-\frac{d\mu}{(\mu^2-c^2)\sqrt{\varphi(\mu)}}\right].$$

Nous retrouvons ainsi les formules d'intégration classiques du problème.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Résultats récents concernant la théorie quantique des champs.* Note (1) de M. **Guido Beck**, présentée par M. Louis de Broglie.

Il est bien connu que le développement de la théorie des champs se trouve être arrêtée par des difficultés qui ont leur origine dans la conception d'une particule ponctuelle. Toutefois il est possible d'obtenir des informations nouvelles en développant des méthodes qui permettent d'étudier le champ propre d'une particule à grande distance ($r>h/2\pi mc$) de la particule.

Il a été démontré (2) que l'état fondamental du champ se trouve être modifié par la présence d'une particule, de telle sorte que la valeur moyenne du champ quantique

$$(1) \qquad \mathrm{A}=\sum_k\sqrt{2\pi}\,c\left(q_{\vec{k}}+\frac{1}{i\omega_k}p_{\vec{k}}\right)\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{\mathrm{L}^3}}$$

---

(1) Séance du 12 mai 1941.

(2) G. Beck, *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 528; *Journ. de Phys.*, 10, 1939, p. 200.

présentant des fluctuations, n'est plus zéro, comme dans le cas du vide, mais qu'elle représente un certain champ statique

$$\overline{A} = F(\vec{r} - \vec{r}_1) \tag{2}$$

dépendant des coordonnées relatives à la position $\vec{r}_1$ de la particule.

L'auteur a entrepris, partiellement en collaboration avec MM. P. Havas, S. Hoxter et J. Pirenne, des travaux pour étudier les champs (2), excités par un électron dans le champ électromagnétique.

Il a été constaté que le comportement de l'électron de Dirac introduit dans la théorie du champ des traits qualitativement nouveaux.

Le spectre continu d'énergie d'un électron libre consiste en quatre branches séparées, qui correspondent respectivement aux deux orientations du spin ($\pm \frac{1}{2}h/2\pi$) et aux deux signes de la charge ($\pm e$).

L'excitation du champ étant liée, suivant la théorie quantique, aux transitions dites virtuelles entre les différents états des quatre branches du spectre, nous arrivons en première approximation, à la classification suivante :

a. Les transitions correspondant à une seule branche du spectre correspondent à l'excitation du champ de Coulomb

$$\beta \frac{e}{r}, \qquad \beta \frac{\vec{v}}{c} \frac{e}{r}. \tag{3}$$

b. Les transitions comprenant des transitions entre deux branches $\pm \frac{1}{2}h/2\pi$ produisent le champ d'un dipôle magnétique (champ du spin)

$$\beta \mu \frac{[\vec{\sigma} \vec{r}]}{r^3}. \tag{4}$$

c. Les transitions entre des états de différent signe de la charge (production virtuelle de paires) donnent lieu à un champ du type

$$\mu \frac{\vec{\alpha}}{r^2}, \tag{5}$$

qui ne satisfait plus aux équations de Maxwell et ne présente plus les propriétés de transformation d'un quadrivecteur.

$\vec{\alpha}$, β et $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Dirac, $\mu = eh/4\pi mc$ dénote le magnéton de Bohr.

La théorie est susceptible d'être appliquée au cas d'un électron lié.

Elle fournit dans ce cas de petits termes supplémentaires qui représentent l'influence de la retardation.

Les champs (3) et (4) conduisent à un échange d'impulsion entre deux électrons par l'intermédiaire du champ qui correspond à l'interaction connue entre deux particules chargées. Le champ (5), par contre, correspond à une interaction *nouvelle* entre un électron et un positron, qui peut être interprétée par un échange d'impulsion à la suite d'une annihilation de la paire et d'une production subséquente d'une nouvelle paire.

Les nouvelles forces n'agissent que si les deux particules sont à une distance extrêmement petite. Pour des vitesses non relativistes des deux particules, ces forces sont très faibles à l'exception de l'état ^3S où elles sont d'une grandeur intermédiaire entre celle des forces de Coulomb et celle des forces entre les spins. Elles pourraient être observées par l'étude de la diffusion des positrons par des électrons. Il n'est pas improbable que les forces entre un proton et un neutron soient dues à un mécanisme analogue.

Bien que la théorie ne puisse pas encore être présentée sous une forme invariante par rapport à une transformation de Lorentz, elle indique que le champ (5) se comporte comme un potentiel tenseur $A_{ik} = -A_{ki}$. Un tel champ pourrait se manifester par de faibles radiations à grand pouvoir de pénétration formées de photons longitudinaux, qui, cependant, n'ont pas encore pu être mis en évidence (expériences inédites de J. Thibaud).

BAROMÉTRIE. — *Altimètre intégrateur.* Note de M. **Fernand Charron**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les altimètres actuellement en usage mesurent l'altitude en fonction de la pression d'après la formule

$$z = -\frac{1}{g}\int_{P_1}^{P} \frac{dp}{a}, \tag{1}$$

a est la masse de l'unité de volume d'air à l'altitude z.

On suppose une loi prédéterminée de répartition en hauteur de la température, qui permet d'effectuer l'intégration. Or cette loi est incertaine.

Un système qui totaliserait automatiquement les termes de l'intégrale (1) serait plus précis. Remplaçons dans (1) a par sa valeur en fonction de a_0

relative aux conditions normales, il vient

$$z = -\frac{p_0}{ga_0}\int_{P_1}^{P_2}\frac{T}{T_0}\frac{dp}{p}. \tag{2}$$

Considérons maintenant un baromètre métallique à aiguille OA, dont les déplacements angulaires $d\theta$ sont proportionnels aux variations de pression dp

$$-dp = k d\theta.$$

Cette aiguille se déplace parallèlement à un plan recouvert d'une feuille de papier, à une distance constante ρ de lui. Elle sert d'axe à une molette finement dentée et encrée, de rayon précisément égal à ρ, qui roule sur la feuille de papier quand θ varie et qui peut en même temps glisser le long de l'aiguille sous l'influence suivante :

Une cellule, plissée, étanche, très souple, est emplie d'air dans les conditions normales. Sa longueur est alors l_0. Exposée à l'air, elle prend dans les conditions p et T la longueur

$$l = l_0\frac{p_0 T}{p T_0}.$$

Or on peut imaginer divers modes de liaison tels que l'allongement de cette boîte fasse glisser la molette le long de l'aiguille, et en particulier rende l égal au rayon vecteur r de la courbe tracée par la molette.

L'intégrale (2), dans laquelle on remplace dp par $-k\,d\theta$ et T/T_0 par sa valeur

$$\frac{T}{T_0} = \frac{pr}{p_0 r_0}$$

tirée de l'équation précédente, devient

$$z = \frac{K}{ga_0 r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,d\theta.$$

Or la molette totalise, par l'angle φ dont elle tourne, l'intégrale précédente, et

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,d\theta = \rho\varphi.$$

En définitive

$$z = \frac{K\rho}{ga_0 r_0}\cdot\varphi.$$

On peut à la fois lire l'altitude et conserver un enregistrement de l'ascension. L'altitude est proportionnelle au nombre des hachures tracées par la molette.

L'appareil peut être gradué sous cloche en atmosphère fictive isotherme. Il est réalisé et fonctionne correctement.

TENSION SUPERFICIELLE. — *Mesure des tensions interfaciales par la méthode de la lame immergée.* Note de M. **André Dognon**, présentée par M. Marc Tiffeneau.

Nous avons signalé, M. Abribat et moi [1], qu'une lame de platine dépoli, ayant une mouillabilité parfaite, peut servir à la mesure statique et continue de la tension de surface des liquides par la méthode de Wilhelmy, d'une façon à la fois précise et très commode. Dans notre dispositif les forces, égales à Al, qui s'exercent sur le contour l de la lame dont le bord inférieur affleure la surface, sont équilibrées par un couple de forces électromagnétiques connu. Avec une lame de contour $l=4^{cm}$ suspendue à un bras de levier de 3^{cm}, la fidélité est de l'ordre du 1/20e de dyne : cm pour l'eau; elle peut être multipliée par 4 ou 5 par accroissement de la longueur du bras ou de la lame.

Si l'on cherche à étudier de la même façon l'interface eau/benzène par exemple, la lame, qui doit d'abord traverser le benzène, est irrégulièrement mouillée par l'eau et fournit des valeurs inutilisables. Par contre, si on la mouille préalablement avec de l'eau et qu'on l'essore soigneusement, elle conserve dans la traversée du benzène une gaine d'eau qui la rend brillante comme un miroir. Lorsqu'elle affleure l'interface, elle est violemment aspirée, et les valeurs fournies sont parfaitement constantes, et correctes si l'on prend soin d'équilibrer le système lorsque la lame est totalement immergée dans le liquide supérieur. Dans le cas d'un liquide plus dense que l'eau, le sens des forces est inversé, et il faut lester la lame de façon que son poids soit suffisant pour lui permettre de pénétrer à travers l'interface. Si les tensions sont élevées, et les différences de densité faibles, le ménisque, au contact de la lame, atteint une hauteur bien plus considérable que dans le cas d'une surface libre, et la hauteur de la lame doit être plus grande (1^{cm} au lieu de $0^{cm},5$).

---

[1] *Bull. Soc. fr. de Physique*, n° 418, 1939, p. 22.

Une deuxième méthode, utilisable pour les liquides qui s'étalent à la surface de l'eau (benzène, éther, chloroforme, huiles végétales), consiste à les déposer sur cette surface en une couche mince. Si la lame traverse la double couche ainsi formée, les forces de traction qui s'exercent sur elle sont la somme des forces dues à l'énergie libre de l'interface et à celles de la surface, ces dernières pouvant être connues par une mesure préalable effectuée avec la lame affleurant la surface libre seule. Dans le cas où l'on a à étudier les variations dues à des traces de matière dissoute, il faut remarquer que l'énergie de surface du liquide organique ne subit que des variations négligeables vis-à-vis de celles qui affectent l'interface.

Les chiffres suivants donnent en dynes : cm quelques valeurs obtenues avec chacune de ces deux méthodes, directe et indirecte (θ, 13°,5 C.).

Corps.	Tension de surface.	Tension interfaciale par rapport à l'eau directe.	indirecte.	valeur standard à 20° C.
Benzène	30,5	34,2	34,0	35,0
Chloroforme	28,5	–	31,0	32,8
Éther	18,6	9,5	9,8	10,7
Huile d'arachide	44,5	9,3	9,9	–

Il faut remarquer que la valeur des tensions de surface mesurées est celle de liquides saturés d'eau, et par conséquent un peu plus élevée que celle du liquide pur. Dans le cas de l'huile, la méthode directe est difficile, ce corps ayant à peu près le même pouvoir mouillant que l'eau vis-à-vis de la lame. Il faut revêtir préalablement celle-ci d'une épaisse gaine d'eau avant de l'introduire dans le liquide. La méthode indirecte, au contraire, n'offre aucune difficulté, à condition de faire d'abord affleurer la lame à la surface de l'eau avant d'ajouter la goutte d'huile, ou de l'humidifier légèrement à l'eau avant de la mettre en contact avec la double couche.

ÉLECTROCHIMIE. — *Conductibilité et dissociation de l'acétate de cadmium.* Note (¹) de Mlle **Marguerite Quintin**, présentée par M. Marcel Delépine.

Il existe peu de renseignements sur la conductivité des solutions des sels de type de valence 1-2 aux grandes dilutions, de telle sorte que la confrontation des données expérimentales et de la théorie des électrolytes est

(¹) Séance du 5 mai 1941.

malaisée. Il m'a semblé intéressant d'étudier de ce point de vue l'acétate de cadmium, dont on pourrait penser qu'il est un électrolyte faible.

La conductibilité est mesurée par la méthode du pont de Kohlrausch, en utilisant un dispositif à haute sensibilité dont la source de courant alternatif est un oscillateur à lampes, et l'appareil de détermination du minimum un téléphone monté sur un amplificateur à lampes. La cellule en verre peu soluble est entièrement fermée et placée dans un thermostat à air réglé à $25^\circ,0 \pm 0^\circ,1$; les électrodes sont platinées légèrement. Chaque détermination est la moyenne de dix mesures, l'erreur moyenne étant inférieure à 0,05 %, l'erreur maximum à 0,1 %. L'eau distillée quatre fois est utilisée fraîche, sa conductivité est de $0,8.10^{-6}$.

L'acétate de cadmium, obtenu en préparant d'abord du carbonate de cadmium pur, puis en attaquant celui-ci par l'acide acétique, est purifié par cristallisations successives. La concentration de la solution mère (à 25°) est déterminée par dosage électrolytique à 0,05 % près.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la conductivité spécifique χ (corrigée pour la conductivité de l'eau) et celles de la conductivité équivalente Λ pour les solutions étudiées. Il faudrait, en outre, tenir compte de la conductivité de l'acide acétique résultant de l'hydrolyse de la solution, mais les mesures du pH des solutions montrent que cette correction est négligeable, même pour les solutions les plus diluées où elle atteint à peine l'ordre de précision des mesures de conductivité.

c (éq. gr./litre).	χ (cm^{-1}.ohm^{-1}).	$\Lambda = \frac{1000\chi}{c}$.	γ.	K.
0,04224	$211,3 . 10^{-5}$	$50,0_3$	0,737	—
0,02112	124,0 »	$58,7_1$	0,782	304.10^{-5}
0,008448	58,97 »	$69,8_0$	0,857	139 »
0,004224	32,44 »	$76,8_0$	0,903	58 »
0,002112	17,31 »	$81,9_5$	0,935	44 »
0,0008448	7,30 »	$86,4_1$	0,960	11 »
0,0002112	1,91 »	$90,4_3$	0,981	2 »

L'allure de la courbe de variation de Λ en fonction de $\sqrt{3c}$ correspond plutôt à un électrolyte fort qu'à un électrolyte faible : les quatre derniers points sont parfaitement en ligne droite et permettent une détermination aisée de la conductivité équivalente limite par extrapolation. La valeur d'ailleurs ainsi obtenue ($\Lambda_\infty = 94,3$) est d'un ordre de grandeur très accep-

table, car d'après la littérature ([2]) les mobilités limites l des deux ions conduisent à $\Lambda_{\infty} = l_{Ac} + l_{Cd} = 41 + 53,8 = 94,8$.

Cependant la pente de la tangente à la courbe $\Lambda = f(\sqrt{3c})$ n'est pas, pour les grandes dilutions, celle prévue par la théorie des électrolytes forts. Pour un électrolyte de type de valence 1-2, la formule d'Onsager est en effet

$$\Lambda = \Lambda_{\infty} - \alpha\sqrt{3c}, \tag{1}$$

où à 25° et en prenant $\Lambda_{\infty} = 94,3$, $l_{Ac} = 41$ le coefficient α est égal à 86,4, tandis que sa valeur expérimentale est 154.

On peut chercher à expliquer cet écart considérable par une dissociation incomplète. L'application de la méthode de Fuoss et Krauss ([3]) ne donne pas de résultats satisfaisants, car elle conduit à admettre une valeur assez incertaine et très basse de Λ_{∞}. Si l'on considère la valeur $\Lambda_{\infty} = 94,3$ comme correcte, on peut calculer le coefficient de dissociation γ par la formule d'Onsager qui, pour un électrolyte 1-2 incomplètement dissocié, est

$$\Lambda = \gamma(\Lambda_{\infty} - \alpha\sqrt{3c\gamma}). \tag{2}$$

D'autre part, la loi d'action des masses, appliquée à l'équilibre de dissociation de l'acétate de cadmium, donne

$$\frac{4c^2\gamma^3 f_+ f_-^2}{1-\gamma} = K, \tag{3}$$

où f_+ et f_- représentent respectivement le coefficient d'activité de l'ion Cd^{++} et celui de l'ion $CH_3CO_2^-$. En première approximation, on peut calculer f_+ et f_- par la formule de Debye-Hückel

$$\text{Log} f_+ = \frac{-4B\sqrt{6c\gamma}}{1 + Aa\sqrt{6c\gamma}}, \qquad \text{Log} f_- = \frac{-B\sqrt{6c\gamma}}{1 + Aa\sqrt{6c\gamma}}, \tag{4}$$

en donnant au rayon ionique une valeur arbitraire ($a = 4$ Å), mais plausible.

Les valeurs de la constante K ainsi déterminées sont données dans le tableau ci-dessus; on voit qu'elles varient considérablement avec la concentration. Bien que les formules (2) et (4) ne soient valables que pour des solutions très diluées, il semble que ces variations soient beaucoup

([2]) *Tables critiques internationales*; Ferguson et Vogel, *Phil. Mag.*, (7), 4, 1927, p. 233.

([3]) *J. Am. Chem. Soc.*, 55, 1933, p. 476.

plus grandes que celles que l'on pourrait attendre d'un électrolyte faible.

En résumé, l'acétate de cadmium paraît se rapprocher des électrolytes forts, bien que la tangente à la courbe $\Lambda = f(\sqrt{3c})$ ne soit pas, à la limite, celle prévue par la théorie d'Onsager.

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur le transport des acides forts et des bases fortes lors de l'électrolyse en solution aqueuse.* Note (1) de M. **Pierre Jolibois**, présentée par M. Aimé Cotton.

Dans des publications précédentes (2), j'ai été amené à formuler des hypothèses concernant l'électrolyse des sels dissous dans l'eau. J'ai notamment proposé une théorie dans laquelle le processus élémentaire de l'électrolyse est un dégagement d'hydrogène et une production d'oxyde basique à la cathode, tandis qu'à l'anode il apparaît corrélativement de l'oxygène et un acide, les deux phénomènes obéissant rigoureusement à la loi de Faraday.

Il convient donc d'examiner avec soin ces phénomènes élémentaires et en particulier l'électrolyse des acides et des bases. Or, si l'on électrolyse une solution d'un acide fort, on constate du côté de la cathode une fuite de l'acide et son remplacement progressif par de l'eau sensiblement pure.

Voici quelques détails sur une expérience relative à l'acide sulfurique en solution N/100 : l'électrolyse a lieu dans un tube de verre de 1^{cm} de diamètre et la cathode est située à la surface du liquide. Ce tube est relié à un compartiment anodique de grande capacité et situé au-dessous. Deux sondes électriques en platine, situées, l'une à 10^{mm}, l'autre à 38^{mm} en dessous de la cathode, permettent de connaître à chaque instant la résistance R et par conséquent la concentration moyenne C de l'électrolyte situé entre les sondes. En effectuant l'électrolyse avec un courant constant de 2 milliampères, on obtient les nombres suivants :

Temps (m).....	0.	15.	30.	45.	60.	75.	90.
R (ohms).....	$1,6.10^3$	$1,6.10^3$	$2,2.10^3$	$1,3.10^4$	$6,5.10^4$	$12,8.10^4$	17.10^4
C (mg/l).....	490	490	350	50	10	5	4

On voit qu'au bout d'un certain temps une colonne d'eau presque pure

(1) Séance du 5 mai 1941.

(2) *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 5, 1938, p. 1429; *Helv. Chim. Acta*, 23, III, 1940, p. 405.

repousse l'électrolyte dont la composition reste constante et qui s'éloigne de l'électrode.

Ce phénomène est général pour les acides forts (et les bases fortes en inversant les pôles). Nous l'avons vérifié en outre pour les acides HCl, HI, pour les bases NaOH, KOH, LiOH. Il en résulte que l'électrolyse des acides forts ou des bases fortes en solution non agitée se transforme instantanément en une électrolyse dont une électrode plonge dans l'eau pure. Cette expérience peut d'ailleurs être montée qualitativement. Dans un tube en U avec un courant constant un peu intense, on voit, du côté de la cathode pour les acides, l'électrolyte s'échauffer par suite de l'augmentation de la résistance. En même temps des bulles gazeuses, dues au dégagement de l'air dissous, dessinent la colonne d'eau superposée à la solution acide. Avec le temps cette colonne augmente régulièrement de hauteur. La surface de séparation, rendue visible grâce à une légère différence d'indice, est agitée et légèrement ondulante.

On peut tirer les conclusions suivantes de ce phénomène, qui ne semble pas jusqu'ici avoir attiré l'attention.

Les acides étant remplacés par de l'eau au cours de l'électrolyse, il en résulte que les ions H suivent les anions et ne sont pas, malgré leur charge, attirés vers la cathode. Les ions ne sont donc pas, comme on le dit souvent, librement errants au sein d'une solution. Même au cours de l'électrolyse, toute portion d'électrolyte contient un nombre sensiblement égal d'ions H et d'anions. La dissociation ionique n'empêche donc pas de considérer des associations ayant des propriétés analogues à celles des molécules.

D'autre part le raisonnement reproduit dans tous les traités pour expliquer les changements de concentration aux électrodes doit être abandonné. Il est fondé sur le déplacement des ions H et OH dans un sens contraire à celui que montre l'expérience citée plus haut. Lorsqu'on dit par exemple que l'ion Cl est cinq fois plus lent que l'ion H, on traduit simplement le fait que 5 atomes d'hydrogène se dégagent à la cathode, tandis qu'une seule molécule d'acide chlorhydrique a cheminé du compartiment cathodique vers le compartiment anodique. Le raisonnement classique est erroné en outre parce que l'hydrogène dégagé à la cathode n'est pas emprunté à l'acide, dans lequel celle-ci ne baigne pas, mais à l'eau de la couche créée par l'électrolyse.

Les changements de concentration aux électrodes dans le cas des électrolyses d'acides forts et de bases fortes sont dus à des déplacements de ces derniers vers l'anode ou la cathode, analogues en tous points à la

cataphorèse. Dans le cas des acides, il se dégage toujours à la cathode de l'hydrogène emprunté à l'eau (dans le cas des bases, de l'oxygène à l'anode). A l'autre pôle, des phénomènes chimiques d'oxydation (ou de réduction) se produisent parfois avec mise en liberté du métalloïde (ou du métal), détruisant ainsi l'acide (ou la base) transporté par cataphorèse vers ce pôle.

Il ne faut pas croire que l'explication de cette cataphorèse exclue l'hypothèse de la charge des ions H ou OH ainsi que celle des ions qui leur sont associés. Elle implique seulement une liaison très forte entre les ions de signe opposé, liaison que le courant électrique ne peut rompre. Le fait que l'ensemble H^+Cl^- soit neutre pris isolément n'implique nullement qu'il le reste en solution. Il suffit de supposer qu'une solution acide ou basique électriquement neutre contienne de l'acide ou de la base porteurs d'une charge égale et opposée à celle de l'eau. L'explication de la cataphorèse constatée devient alors évidente.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Les caractères systématiques des sommes d'intervalles consécutifs entre désintégrations radioactives.* Note (1) de M. **Jean Thibaud**, présentée par M. Louis de Broglie.

J'ai signalé, il y a quatre ans (2), une anomalie qui se présenterait dans le classement par ordre de grandeur x des intervalles de temps entre désintégrations α successives du polonium : elle consiste en écarts périodiques, positifs et négatifs, entre la distribution des intervalles observés et la distribution continue théorique $\beta e^{-\beta x}$ (β inverse de l'intervalle moyen x_0), de sorte que certaines longueurs d'intervalles P se trouvent en excès, et d'autres longueurs D en défaut. Depuis j'ai retrouvé également cette anomalie sur les courbes représentant la distribution des plus grandes valeurs.

1. Pour rechercher comment se succèdent *dans le temps* les diverses classes d'intervalles, j'ai étudié la distribution des sommes obtenues en ajoutant m intervalles consécutifs : là encore le groupage des intervalles successifs par deux, puis par trois etc., révèle une répartition discontinue.

---

(1) Séance du 12 mai 1941.

(2) *Bull. Soc. Fr. Phys.*, n° 406; voir *Journal de Physique*, 7e série, 8, 1937, p. 97 S.

La distribution en fréquence des sommes de deux intervalles (*fig. a*), ou des sommes de trois intervalles (*fig. b*), présente un caractère périodique assez éloigné de la distribution statistique continue

$$p(x) = \frac{\beta^m}{(m-1)!} e^{-\beta x} x^{m-1}.$$

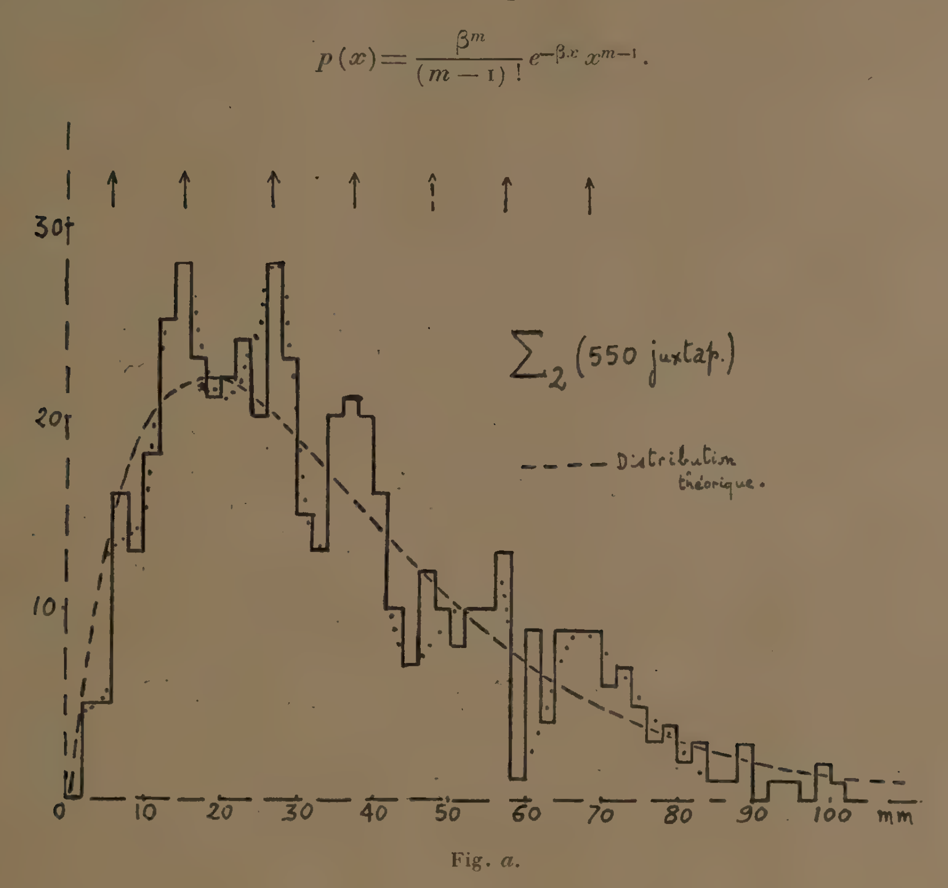


Fig. *a*.

Certaines valeurs de sommes sont privilégiées P (fréquences en excès), d'autres défavorisées D (en défaut). D'une façon très générale, pour les divers enregistrements de désintégration α étudiés et pour les divers modes de découpages possibles de ceux-ci, la périodicité de ces sommes P ou D peut être exprimée au moyen d'une expression paramétrique et d'un intervalle de temps élémentaire X, $P = nX$; $D = (n + 1/2)X$.

2. Sur la distribution réduite obtenue par division préalable des longueurs d'intervalles observés par cet intervalle élémentaire X, on note un défaut de la décimale 0,5 et un excès des décimales voisines de 0,1 ou de 0,9. Ceci est également en faveur de l'existence d'un intervalle élémentaire X.

3. L'ensemble des résultats pourrait être résumé sous la forme suivante : les longueurs des intervalles, ou des groupes d'intervalles successifs,

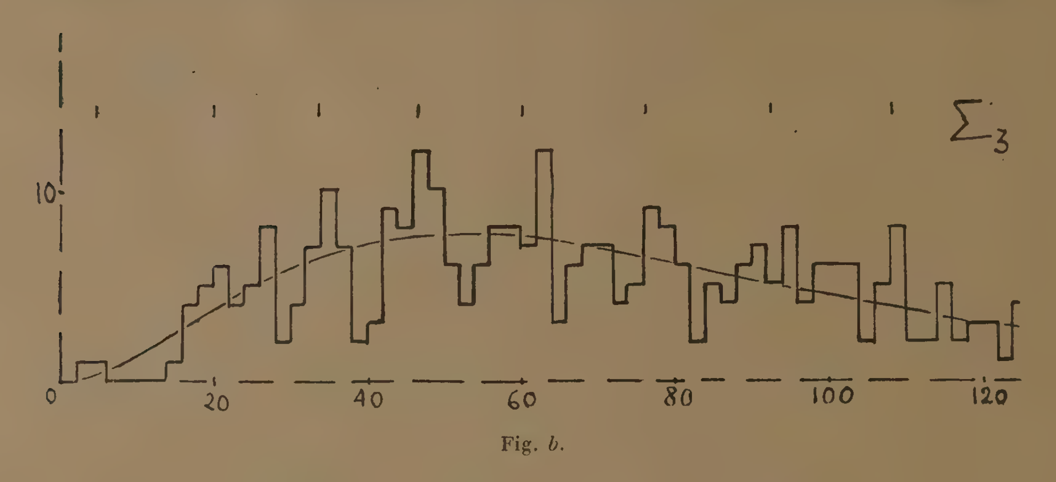


Fig. *b*.

s'expriment fréquemment par une relation paramétrique d'un élément d'intervalle de temps, qui est lui-même lié à l'intervalle moyen x_0.

4. Ces résultats, qui expriment une tendance générale de la distribution, demandent confirmation sur un matériel statistique plus abondant, mais ce qui, dès maintenant, paraît frappant est la reproductibilité des caractères décrits pour des valeurs numériques toujours les mêmes.

PÉDOLOGIE. — *Évolution des minéraux résiduels et notamment du quartz dans les sols autochtones en Afrique Occidentale française.* Note [1] de M. **Louis Glangeaud**, présentée par M. Auguste Chevalier.

Pour distinguer les sols autochtones, formés uniquement d'éléments provenant de la roche mère, des sols allochtones ayant reçu des apports exogènes, nous avons étudié l'évolution des minéraux résiduels dans chaque profil. En effet, les minéraux résiduels provenant de la roche mère ont une évolution irréversible. Ils représentent donc de meilleurs repères que les produits de décomposition très mobiles.

L'échantillon est d'abord examiné au binoculaire. Puis, après attaque aux acides et à la potasse et séparation par liqueurs lourdes, on détermine le pourcentage et la courbe granulométrique des minéraux résiduels. Les

[1] Séance du 12 mai 1941.

plaques minces permettent de mesurer la grosseur, le pourcentage, et de préciser la forme et la répartition de ces éléments. Avec ces données, nous établissons les courbes de variations du quartz Q et des autres minéraux résiduels R (en ordonnées, la profondeur relative; en abscisses, le pourcentage de quartz). Puis, nous calculons le *coefficient d'éluviation* $E = Qn/Qo$, Qn étant le pourcentage du quartz au niveau n et Qo le pourcentage dans la roche mère. Le *coefficient de décomposition* est $D = Rn/Ro$, où Rn est le pourcentage des minéraux résiduels, autres que le quartz au niveau n et Ro le même pourcentage dans la roche mère.

Cette méthode a été appliquée aux échantillons de la Mission Scaëtta (1937). Nous avons utilisé parmi les profils de l'A. O. F. seulement ceux pour lesquels la roche mère conservait une teneur en quartz sensiblement constante.

Dans les profils autochtones, les minéraux résiduels R, autres que le quartz, disparaissent graduellement par décomposition entre la roche mère et la surface. Si, dans un profil et en dehors des relicts, apparaissent des minéraux nouveaux, des sables éoliens ou des minéraux résiduels plus gros et moins altérés que ceux situés dessous, il y a eu apport de minéraux exogènes. Nous avons pu ainsi reconnaître que des profils, en apparence autochtones, étaient en réalité allochtones.

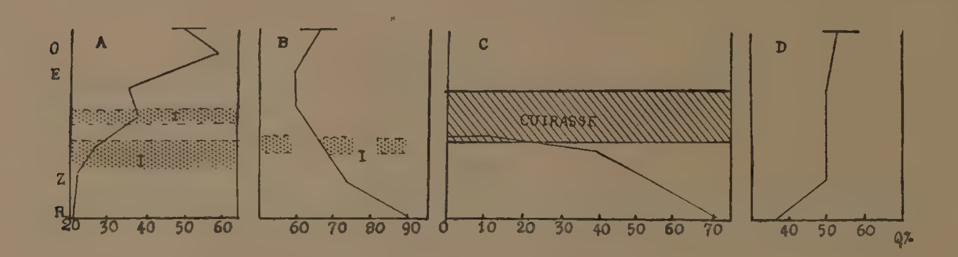
Évolution du quartz. — *Pourcentage*. — A. Dans le cas le plus fréquent (12 profils), la teneur en quartz augmente entre la roche mère et la surface. Ces *types éluviaux* autochtones ont été observés dans la forêt tropicale de la Côte d'Ivoire (*fig*. A, Km. 19 du chemin de fer d'Abidjan, épaisseur 12^{m}), de l'Est de la Guinée et dans le Nord du Soudan. Les horizons illuviaux I aluminoferriques n'y sont généralement pas encore durcis et ils se superposent au profil sans modifier sensiblement le pourcentage en quartz. L'augmentation du quartz est donc due ici, non à des apports exogènes, mais à la disparition du ciment entraîné par le phénomène d'éluviation.

B. Dans 5 profils, la teneur en quartz diminue en allant vers la surface ($E < 1$). Ceci peut être dû, soit à une dissolution du quartz, soit à un apport de produits de décomposition, formant un sol *semi-autochtone*, la roche mère étant une quartzite (*fig*. B, Sikasso, Soudan, ép. $1^{m},30$).

C. Dans les *cuirasses subaériennes* et les croûtes, il y a souvent disparition totale des minéraux résiduels ($E = 0$). C'est le cas dans quatre profils, pour les carapaces subaériennes de plusieurs sommets de la Côte d'Ivoire (*fig*. C, Mt. Nouava, Massif du Nimba, ép. $0^{m}50$) et de la

Guinée. Il a pu se produire ici une exsudation des produits alumino-ferriques qui auraient formé une néoroche, au-dessus de la roche mère.

D. Dans un quatrième type (8 cas), le pourcentage de quartz varie peu



entre la roche mère et la surface (E voisin de 1). Ce type est fréquent dans les *colluvia de dépression* et de bas de pente. On a là un sol semi-autochtone (*fig.* D, Massif de Man, ép. 4^{m}), dans lequel les éléments entraînés en profondeur sont remplacés par des produits de décomposition amenés par ruissellement. Mais il n'y a pas ici d'apport ou de départ de minéraux résiduels, comme dans les sols allochtones.

Grosseur. — La diminution de grosseur des grains de quartz se produit rarement par dissolution, mais presque toujours par fragmentation. Les grains de quartz peuvent, dans la roche mère, offrir une courbe granulométrique irrégulière, notamment dans les granites et dolérites à micropegmatite, ainsi que dans les complexes métamorphiques. Dans les complexes métamorphiques, le quartz provient soit de grains formant les lits des gneiss et micaschistes, soit de cristaux plus gros constituant les amandes et les filonnets. Dans ces cas les deux grosseurs restent distinctes sur une partie du profil. Vers la surface, les grains les plus gros tendent, par diminution, à se confondre avec les grains fins. La pédogenèse provoque ainsi une *régularisation des grosseurs*.

Forme. — Le quartz, xénomorphe dans la roche mère et dans les ersatz, perd ses caractères primitifs vers la surface où ses petites indentations disparaissent. Pour les grains de quartz homogènes et non fissurés, les angles ont tendance à s'arrondir. Par contre, si le quartz est fissuré, les grains se fragmentent avec des angles aigus et des cassures conchoïdales. Ces variations de la forme sont surtout nettes pour les éléments au-dessus de 200^{μ}.

GÉOLOGIE. — *Sur l'existence d'une ligne de rebroussements des plis posthumes au sud de Reims.* Note [1] de M. **Paul Jodot**, transmise par M. Lucien Cayeux.

Le brusque rebroussement de l'anticlinal de Gamaches [2] dans la Montagne de Reims ne représente pas une anomalie tectonique isolée. Cette déformation correspond à l'un des points d'une ligne axée, à direction grossièrement subméridienne, jalonnée par des rebroussements, partiellement en abaissement d'axe, des autres ondulations champenoises, situées plus au Sud. Tous ces rebroussements ont la forme d'un V évasé, souvent à fort relief, et les branches du V sont travaillées différemment par l'érosion : dans le pli de Gamaches, l'angle du V est érodé; la branche ouest du V n'existe plus dans l'anticlinal du Montaigu; par contre, dans les ondulations du bois du Tartre et du Bray, chacun des axes traverse ou bien passe en bordure des buttes-témoins, isolées de la cuesta.

Voici le tracé des rebroussements au sud de l'anticlinal de Gamaches :

1° L'anticlinal secondaire du Montaigu, nouvellement identifié, qui vient de l'Ouest, porte la craie vers 200^{m} à Mutigny. De ce village, l'axe esquisse un V, particulièrement érodé, jusqu'au Moulin Battreau, passe sur le mamelon 185 couvert de meulières sannoisiennes en débris, avant de faire remonter le Sénonien C^{8} à 198^{m} au Montaigu (212^{m}) et d'aboutir à Ambonnay. 2° L'anticlinal à relief mousse du Multien coupe le plateau, en Sannoisien voûté, de la Brie champenoise : de la cote 252 (Sud d'Igny-le-Jard), il gagne au SSE le point 255 (Est de Villers-au-Bois); par un rebroussement peu accusé vers le Nord, il contourne Gionges-Saint-Ferjeu. Puis, le Maestrichtien s'élève à 218^{m} sous le point haut 240, et l'axe atteint le Mont-Blanc au sud du Mesnil-sur-Oger. 3° L'anticlinal du Bois du Tartre monte à 248^{m} avec le Stampien de Férébrianges; il semble gagner, par un double crochet, les buttes isolées en Maestrichtien avec meulières de Brie, la plus méridionale, celle de Toulon-la-Montagne, qu'il longe sans atteindre le point haut 239, mais traverse celle de Charmont (210^{m}) au Nord; puis le pli borde, par le Sud, le Montien du Mont-Aimé et abandonne la craie sénonienne au Nord-Est de Pierre-Morains. 4° L'anticlinal du Bray, bien jalonné par le Stampien de Charleville à Allemand, prend une

---

(1) Séance du 12 mai 1941.

(2) P. Jodot, *C. R. S. S. G. F.*, 31 mars 1941, p. 34-35.

direction telle qu'il doit laisser sur son flanc méridional la butte de Chalmont (201^m), couronnée de meulières fragmentaires du Sannoisien. Son axe semble remonter d'une façon brusque à partir d'une des cotes 183 ou 180 jusqu'au Mont-Aout (221^m), coiffé des mêmes roches siliceuses; d'où, sans quitter la même craie, recouverte de blocs assez « volumineux » en grès stampiens et de « petits cailloux de meulières » (³), il décrit, au Nord de Fère-Champenoise, un arc de cercle jusqu'à Montépreux. 5° C'est entre les deux derniers rebroussements de Toulon-la-Montagne et de Chalmont que les marais de Saint-Gond occupent, dans le synclinal du Thérain, leur surface transversale la plus étendue : peut-être y a-t-il là aussi une amorce de rebroussement.

Le voisinage de cette ligne de rebroussements paraît avoir eu une certaine répercussion sur la géologie locale :

a. Tout d'abord, rappelons « le caractère très spécial des dépôts tertiaires de l'Est du Bassin de Paris », indices pour P. Lemoine (⁴) d'une « ligne de Schaarung » : 1° les zones les plus inférieures du Thanétien localisées dans la région de La Fère; 2° les lagunes sparnaciennes envahies dès le début de l'Yprésien, beaucoup plus tôt qu'ailleurs; 3° le dépôt des premiers sédiments bartoniens (Mont-Notre-Dame); 4° l'importance du Ludien marin dans la région de Reims.

b. D'autres formations stratigraphiques sont mieux groupées que les assises précédentes, sur la bordure de la cuesta entre Reims et Sézanne. Leurs dépôts s'allongent dans une bande territoriale subméridienne; ils se déposèrent ainsi parallèlement et bien plus près de la ligne des rebroussements : 1° le Montien du Mont-Aimé et de Vertus accumule ses sédiments dans un chenal étroit en forme de fjord; 2° pendant le Thanétien, le travertin de Sézanne est relié au lac de Rilly-la-Montagne par un fleuve, tandis que trois golfes marins, emboîtés les uns dans les autres, se succèdent et s'avancent en Champagne; le second, le plus resserré de toutes les avancées marines tertiaires, celui de l'assise à *Pholadomya Konincki*, représente au Nord-Ouest de Reims les sédiments marins de cet étage, les plus anciennement connus; 3° un fleuve yprésien et son large estuaire sableux avec Unios et Térédines s'étendit depuis Sézanne jusque dans la partie occidentale de la Montagne de Reims.

c. A signaler l'hydrologie très particulière des fonds de vallées

---

(³) J. Laurent et P. Lemoine, *B. S. G. F.*, 4ᵉ série, **12**, 1912, p. 323.

(⁴) *Cinquantenaire de la Soc. Géol. de France*, **11**, 1930, pp. 401-498, pl. XLIX-L.

marécageuses des marais de la Vesle, près de Reims, et des marais de Saint-Gond.

d. Enfin on tiendra compte d'une série de petites failles de glissement à direction subméridienne : 1° les failles de la craie à Dieu-Lumière, dans le sud-est de la ville de Reims, se trouvent placées dans le prolongement N de la ligne de rebroussements; 2° d'autres failles s'échelonnent dans le Tertiaire, à l'ouest de cette ligne, suivant une orientation générale NNW : *a.* au Mont Bernon près d'Epernay; *b.* non loin de Pourcy; *c.* 14 petites failles à Pargny-les-Reims; *d.* entre Jonchery et Hervelon; *e.* à Cormicy.

La « ligne de Schaarung », entrevue par P. Lemoine, et la ligne axée de rebroussements des plis posthumes dont j'indique le tracé, ne représentent, à mon avis, qu'un seul accident tectonique. Cet axe transversal a pu se former à la limite de la zone affaissée du Bassin de Paris et d'une région profonde de roches massives édifiées en un dôme allongé. C'est probablement l'enfoncement du Bassin parisien qui, par subsidence, motiva l'ébauche du plissement, et provoqua, par contre-coup, la naissance des petites failles de tassement.

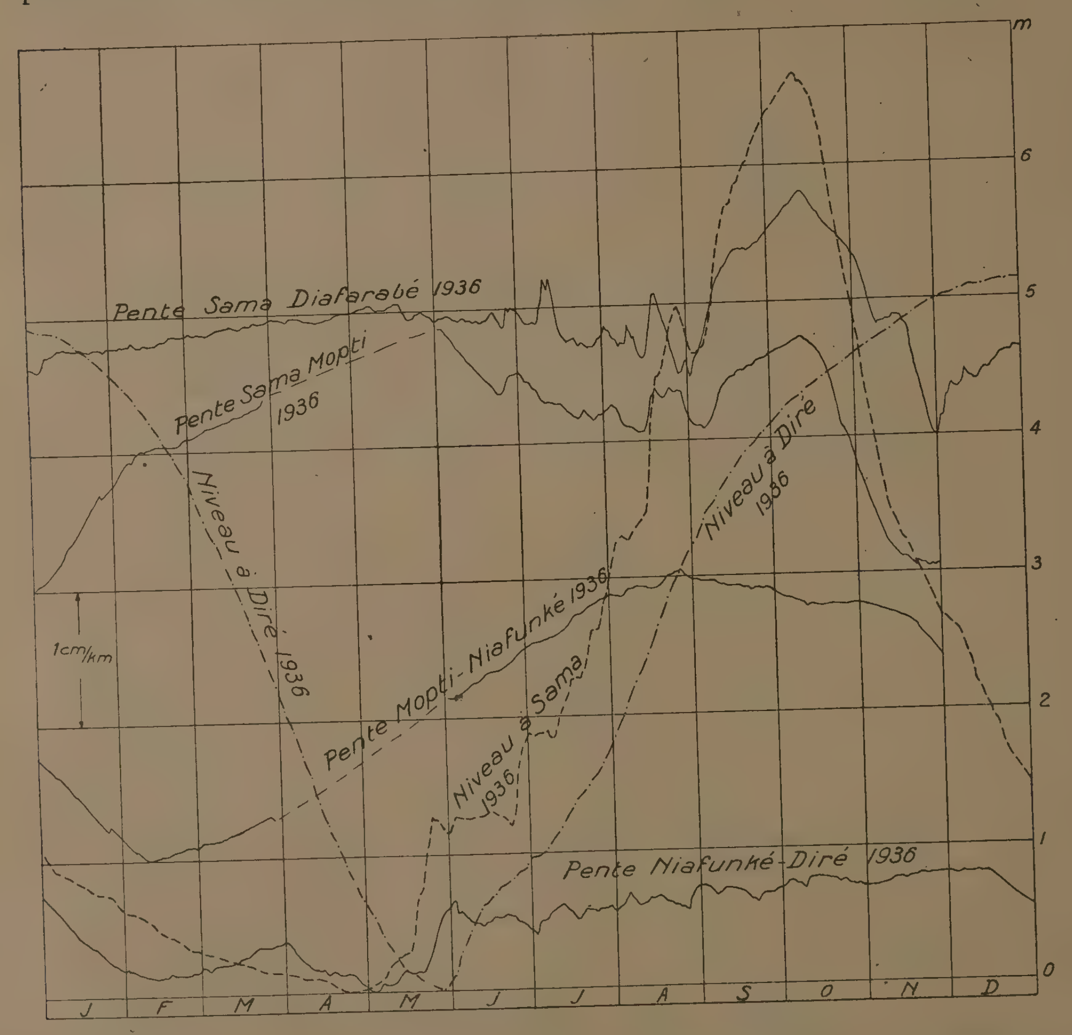
HYDROLOGIE. — *La marche des pentes du Niger entre Sama et Diré.* Note de M. **Vladimir Frolow.**

En aval de Sama et jusqu'à Tondifarma, les échelles de crue du Niger n'ont pas été rattachées à un repère commun. C'est pourquoi, pour ce parcours du fleuve, on étudiera seule la *marche* de la pente, sans pouvoir en donner la valeur.

Les échelles comparées sont, d'amont à aval, Sama, Diafarabé, Mopti, Niafunké, Diré. La station de Diafarabé n'ayant pas d'années communes avec Mopti, on a comparé Sama avec chacune d'elles. Le graphique accompagnant cette Note représente la pente additionnelle qui résulte de la variation de la différence de niveau au-dessus de sa valeur minimum.

Sama-Diafarabé. — Sama se trouve dans la partie amont des inondations et Diafarabé au départ du marigot de Diaka, à l'origine du delta intérieur actuel du Niger. Sur ce parcours, sous l'action du vidage du lac Débo, la pente augmente lentement jusqu'à l'arrivée de la crue, lorsque se produit une brusque diminution de la pente, suivie par une nouvelle et forte augmentation due à la stabilisation du niveau de l'inondation à Diafarabé,

tandis que l'eau monte encore à Sama. Ce fait explique le maintien du lit dans les sables, car il y a ici augmentation de la vitesse pour le plus fort volume des eaux. L'étal du maximum de la crue terminé à Diafarabé, la pente diminue brusquement, mais en ce moment il n'y a plus de sédiments



transportés en quantité notable et le débit d'étiage suffit pour maintenir le lit. On vérifie aisément sur le graphique que, pour un même niveau à Sama, la pente est plus forte à la montée qu'à la décrue des eaux.

Sama-Mopti. — Ici toute la marche des pentes est dominée par le niveau du lac Débo. La pente augmente en raison de la baisse de celui-ci pendant la décrue et en étiage, à partir du moment, variable d'année en année, où

le débit de l'exutoire du lac l'emporte sur celui qui y arrive. Pendant la montée de la crue, la pente montre une tendance générale à la décroissance; cependant, à chaque augmentation de la rapidité de la montée des eaux à Sama, correspond un accroissement de la pente auquel succède une diminution dès que la montée à Sama se ralentit, ou lorsqu'il y a une stabilisation passagère du niveau. La cause en est évidemment dans le remplissage du lac.

Mopti-Niafunké. — La marche de la pente affecte entre ces deux échelles la forme d'une grande onde annuelle avec un maximum coïncidant avec le maximum en amont du lac, à Mopti, et un minimum pendant l'étiage en cet endroit, lorsque le premier quart environ de la décrue en aval du lac est réalisé. Ce régime s'explique par l'emmagasinement dans le lac Débo. Le maximum du graphique des pentes est dû à la surélévation des eaux en amont par rapport à la surface du lac dont l'altitude varie sensiblement moins. Le minimum est dû à la baisse des eaux du lac qui continue pendant que l'étiage stabilise le niveau en amont. Aucune conclusion sur les conditions locales d'écoulement ne peut être tirée de ces constatations par suite justement de l'existence du lac Débo.

Niafunké-Diré. — Sur ce parcours on retrouve les conditions d'écoulement dans un canal, la pente augmentant avec la crue. Le graphique présente des variations secondaires qui seront discutées ultérieurement. La valeur de la pente totale est très réduite en aval du lac Débo, et ses variations intéressent peu le lit, car le débit solide y est négligeable.

AGRONOMIE. — *Amendements à apporter aux sols tropicaux dégradés pour la régénération de la fertilité.* Note de M. **Hélios Scaëtta**, présentée par M. Auguste Chevalier.

La technique de la fumure minérale du sol semble devoir être pratiquée dans les pays intertropicaux humides sous une forme très particulière et insoupçonnée jusqu'à ce jour, infiniment moins coûteuse aussi, puisque les engrais chimiques sont remplacés ici, grâce au climat, par des roches banales, pourries, alors que dans les zones tempérées la lenteur de l'action climatique nécessite l'épandage de substances facilement décomposables. Cette conclusion est conforme à celle déjà exprimée par A. Demolon (1).

(1) *Chimie et Industrie*, numéro spécial des *Journées des Engrais*, Paris, 1939.

Les roches qui nous paraissent remplir le mieux le rôle de reminéralisateurs sont : le groupe des rhyolites-granites; les néphélines-syénites; les diorites, les gabbros; les quartz-monzonites; latites, dacites, la plupart des schistes métamorphiques, les phonolites, les basaltes et basaltites. Parmi les roches sédimentaires, celles qui contiennent de hautes proportions des feldspaths, hornblende, pyroxène et glauconite. Les calcaires et marnes paraissent efficaces, si on les emploie en association avec des roches cristallines. Parmi les sédiments clastiques, citons les grès feldspathiques (arkoses).

L'expérience modifiera naturellement cette liste et établira une hiérarchie des roches d'après leur composition en fonction du sol qu'elles sont appelées à fertilliser.

Le degré d'altération des roches destinées à être incorporées au sol devrait, à notre sens, ne pas dépasser celui de la séricitisation. L'altération pourrait probablement être obtenue par une application judicieuse des *phénomènes de pneumatolyse* qui utiliserait au maximum les ressources locales (eaux chargées de CO^2, hautes températures solaires, bois et huiles végétales).

L'adoption des principes qui viennent d'être énoncés à la suite de nos observations nous paraît avoir une importance fondamentale pour l'avenir de l'agriculture des pays intertropicaux.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Action du benzoate d'œstradiol en solution huileuse dans la différenciation du sexe d'une race de* Rana temporaria *L. appartenant au type différencié.* Note de M. **Louis Gallien**, présentée par M. Maurice Caullery.

Dans une précédente étude, j'ai montré (1938) que l'hormone femelle, administrée sous forme de benzoate d'œstradiol en solution huileuse à une race indifférenciée de *Rana temporaria* L., avait une action homologue sur la différenciation du sexe, en ce sens que tous les animaux traités étaient femelles lors de la métamorphose, comme les témoins. Cependant Padoa (1936-1938), Foote (1938), Witschi et Crown (1937) [1], administrant

---

(1) L. Gallien, *Bull. Biol. France et Belgique*, **72**, 1938, p. 269; E. Padoa, *Monit. Zool. Ital.*, 1936, p. 285; *Arch. Ital. Anat. Embr.*, **40**, 1938, p. 122; Ch. Foote, *Anat. Rec.*, **72**, 1938, p. 120; E. Witschi et E. Crown, *Anat. Rec*, **70**, 1937, p. 121.

l'hormone femelle en solution aqueuse chez d'autres Anoures, *Rana esculenta* et *Rana pipiens*, obtinrent une masculinisation des gonades, résultat qui traduit une action hétérologue de l'hormone femelle.

Deux questions se sont trouvées posées alors : 1° Le résultat contradictoire observé tenait-il au fait d'opérer sur deux espèces différentes et surtout sur deux types raciaux différents ?

2° Si le benzoate d'œstradiol en solution huileuse a une action homologue dans la différenciation du sexe, comment se traduira cette action sur une race différenciée de *Rana temporaria*, dans laquelle on peut admettre que les facteurs génétiques de la détermination sexuelle sont plus forts que dans une race indifférenciée ?

Dans le but d'élucider ces deux questions, les expériences de 1938 furent reprises sur une race différenciée de *Rana temporaria*, race de montagne provenant du refuge de Pratlong (Sud de Luchon, altitude 1860^m).

L'expérience a été conduite de la manière suivante :

Origine des Grenouilles : Pratlong.

Développement du lot étudié, séries définies. — Des pontes fraîches ayant été observées le 4 juin 1938, il fut recueilli le 12 juin un lot de têtards. Ceux-ci venaient de résorber leurs branchies externes, le spiracle était formé. L'âge des têtards, leur état, correspondaient au stade où la gonade est encore indifférenciée.

Les animaux furent divisés en plusieurs séries, dont deux sont à retenir ici :

Série B. — 30 têtards furent destinés à constituer le lot témoin. Les animaux furent élevés à la température de 19° à 20°, qui, on le sait, représente, chez les races différenciées, le point thermique assurant à la métamorphose la *sex-ratio :* 1 ♂, 1 ♀.

Série D. — 40 têtards, élevés à 19-20°, reçurent trois injections (les 13, 22 et 27 juin) d'une solution huileuse de benzoate d'œstradiol titrée à 1^{mg}, soit 10000 U. I. pour 1^{cm^3}. Chaque têtard a ainsi reçu environ la valeur de 65 U. I.

La métamorphose s'est déroulée entre le 11 juillet et le 6 août pour la série B, entre le 18 juillet et le 6 août pour la série D. 28 têtards de la série B et 32 têtards de la série D achevèrent leur métamorphose et furent étudiés histologiquement. Au cours de l'autopsie, il fut constaté que tous les animaux de la série D avaient encore, sous les téguments, de fines gouttelettes, plus ou moins émulsionnées, de la solution injectée.

L'étude des animaux a montré les faits suivants :

Série B. — Sur 28 animaux, 13 étaient mâles, 15 étaient femelles, ce qui représente très sensiblement une *sex-ratio* 1 ♂ : 1 ♀ et établit que la race en cause est du type différencié. Les ovaires étaient à un stade avancé et remplis d'auxocytes.

Série D. — Sur 32 animaux, 18 étaient des ♀ pures, à ovaires très développés présentant un développement marqué des auxocytes ; 2 étaient

des mâles purs; 12 étaient des intersexués. Le degré d'intersexualité de ces 12 animaux était variable; 2 avaient des ovariotestes à tendance ♀ assez accentuée, 2 avaient des ovariotestes à tendance ♂, 7 avaient, d'un côté, un ovarioteste à tendance ♂ et de l'autre un testicule pur, 1 présentait, à gauche, un ovaire pur avec nombreux auxocytes, à droite, un ovarioteste.

On peut donc admettre que les 18 ♀ étaient des ♀ génétiques, sur lesquelles l'action homologue de l'œstradiol n'entraîne aucune modification, et que 14 animaux étaient des ♂ génétiques, qui ont été, à des degrés variables, transformés en intersexués sous l'action de l'hormone ♀. Celle-ci a donc eu une action homologue, qui, dans l'ensemble, a été relativement faible.

Ces résultats permettent d'apporter une réponse aux deux questions posées :

1° Le benzoate d'œstradiol, administré en solution huileuse, n'a pas, sur une race différenciée de *Rana temporaria*, d'action hétérologue. Il ne masculinise pas les animaux, qu'il s'agisse de ♀ ou de ♂ génétiques.

Ceci permet de conclure que les résultats obtenus, lorsque l'hormone agit en solution aqueuse, ne tiennent pas à la race considérée. De l'ensemble des résultats obtenus par moi-même et par les auteurs cités ci-dessus, on peut dire que le résultat paradoxal d'une hormone femelle ayant une action masculinisante lorsqu'elle est administrée en solution aqueuse, ne tient ni aux races, ni aux espèces en cause, mais au mode d'administration, celui-ci étant lié au solvant.

2° L'action de l'hormone ♀ en solution huileuse est homologue. Elle se traduit uniquement, chez les ♂ génétiques, en entraînant de l'intersexualité. Les ♂ génétiques possèdent des ovariotestes, sans toutefois qu'un animal subisse un renversement sexuel total dans le sens ♂ → ♀.

La séance est levée à $15^{h} 25^{m}$.

A. Lx.